Т. А. МАТВЕЕВА, Н. Г. РЫЖКОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Часть I

Екатеринбург
2004

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Конспект лекций

Часть I

Научный редактор проф., д-р физ.-мат. наук Р.А. Вайсбурд

Екатеринбург
2004

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я73
М 33

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук А.Н. Бабушкин,
д-р физ.-мат. наук А.М.Тарасьев

Авторы: Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

М 33 Высшая математика: Конспект лекций / Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. 195 с.
ISBN 5-321-00469-2

В работе представлены 23 лекции по курсу высшей математики, содержание которых соответствует учебным программам большинства инженерно-технических специальностей в первом семестре.

Подготовлено секцией «Информационные системы и технологии» Института образовательных информационных технологий.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я73

ISBN 5-321-00469-2

Оглавление

Введение

Настоящая работа представляет собой компактное изложение вопросов курса высшей математики, предусмотренных учебными программами большинства инженерно-технических специальностей в первом семестре. Учебный материал структурирован на 23 лекции, каждая из которых носит законченный характер, строго выверена по объему на реальное лекционное время, имеет четкую внутреннюю структуру, что является важным для системного восприятия курса.

Стиль изложения учебного материала соответствует типу работы, поэтому в ней нет глав и параграфов, нет громоздких числовых обозначений определений, теорем, формул. Особое внимание уделяется обеспечению согласованности терминологии и обозначений с базовыми задачниками.

Данный конспект предназначен, главным образом, для студентов, но может быть полезен и для молодых преподавателей высшей школы с методической точки зрения.

Приложением к конспекту лекций является CD-ROM, содержащий электронную версию конспекта. Последняя пронизана системой гиперссылок различных уровней, поэтому особенно удобна к использованию в период подготовки к экзаменам. Электронный конспект по сравнению с традиционным обладает повышенной информационной функцией, открыт для оперативных изменений и дополнений, что является важным для преподавателей и студентов в организации самостоятельной работы, может быть использован в системе дистанционного образования.

I. Алгебра матриц

Лекция 1. Матрицы и определители, их характеристики

Содержание

1. Понятие матрицы.
2. Определители второго, третьего, n-го порядка.
3. Свойства определителей.
4. Разложение определителя по элементам строки или столбца.
5. Вычисление определителей n-го порядка (2 метода).

1.1. Понятие матрицы

Определение

Матрицей размера $(m \times n)$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij}, где $i = 1,2,...,m$ – номер строки, $j = 1,2,...,n$ – номер столбца, таких, на пересечении которых расположены числа a_{ij},

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ – матрица размера (2×3).

Определение

Если $m = n$, матрица называется ***квадратной*** порядка n.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка.

Определение

Главная и ***побочная диагональ*** квадратной матрицы –

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побочная диагональ главная диагональ

Частные случаи квадратных матриц

а) ***треугольная матрица*** – выше или ниже главной диагонали все элементы равны нулю.

Пример

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix};$$

б) ***диагональная матрица*** – выше и ниже главной диагонали – нули, на главной диагонали произвольные числа.

Пример

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

в) ***единичная матрица*** – диагональная матрица, на главной диагонали которой – единицы.

Пример

$E=(1)$ – единичная матрица первого порядка.

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица второго порядка.

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ – единичная матрица третьего порядка.

Таким образом $E=(a_{ij})$, $a_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$

Определение

Транспонированная матрица – матрица A^T, построенная из матрицы A, путем замены строк на столбцы и наоборот (строки и столбцы меняются ролями).

Пример

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}.$$

1.2. Определители второго, третьего, n-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Определение

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице второго порядка, называется число, обозначаемое $\det A$ или $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$, равное

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Правило

Определитель второго порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов на побочной диагонали.

Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной матрице третьего порядка, называется число

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Правило треугольника

В выражение определителя со знаком '+' входят произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; со знаком '–' ... (то же про побочную диагональ).

Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 7\cdot5\cdot3 - 4\cdot2\cdot9 - 1\cdot6\cdot8 = 0.$$

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице n-го порядка, называется число, равное сумме всевозможных произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца и снабженных знаками «+» или «–» по некоторому определенному правилу (строгое определение этого понятия можно найти в учебной литературе, в данном курсе оно не требуется).

1.3. Свойства определителей

(уметь доказывать для определителей третьего порядка)

1°. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется:

$$\boxed{\det A = \det A^{T}.}$$

Доказательство

Вычислить левую и правую части равенства по правилу треугольника и сравнить результаты.

2°. Перестановка любых двух строк (столбцов) меняет знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3°. Определитель с двумя равными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство

Рассмотрим $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Переставим в этом определителе первую и вторую строки. По предыдущему свойству

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Следовательно, $2\Delta = 0$. Отсюда $\Delta = 0$.

4°. Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5°. Определитель, у которого две строки (2 столбца) пропорциональны, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6°. Определитель, в некоторой строке которого каждый элемент равен сумме двух слагаемых, равен сумме двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & a_2' + a_2'' & a_3' + a_3'' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7°. Величина определителя не изменится, если ко всем элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на число k:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & a_2 + kb_2 & a_3 + kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Замечание

В новом определителе без изменения записывается строка, которую умножали на k (***рабочая строка***).

1.4. Разложение определителя по элементам строки или столбца

Определение

Минором M_{ij} ***элемента*** квадратной матрицы a_{ij} называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12.$$

Определение

Алгебраическим дополнением A_{ij} ***элемента*** квадратной матрицы a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$.

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

8°. Величина определителя равна сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} \; -$$

– формула разложения определителя третьего порядка по первой строке.

Для определителя n-го порядка:

$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – формула разложения по элементам j-го столбца;

$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ – формула разложения по элементам i-й строки.

Замечание

В формулах разложения A_{ij} выражается через определители порядка $n-1$, т.е. на единицу меньше исходного.

9°. Сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов *другой* строки (столбца) равна нулю:

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

10°. Величина определителя треугольной матрицы равна произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Доказательство

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\det A = a_{11}A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = a_{11}A_{11} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Замечание

Перечисленные свойства используются при вычислении определителей.

1.5. Вычисление определителей n-го порядка (2 метода)

I. Понижение порядка по свойству 8° (формулы разложения).

II. Приведение определителя к треугольному виду (алгоритм на основе свойства 7°).

Лекция 2. Алгебра матриц

Содержание

1. Основные операции над матрицами и их свойства.
2. Обратная матрица.
3. Решение матричных уравнений.
4. Невырожденные системы n линейных уравнений с n неизвестными.

2.1. Основные операции над матрицами и их свойства

Определим несколько отношений и операций над матрицами.

Рассмотрим матрицы $\mathrm{A} = (a_{ij})$ размера $(m \times n)$, $\mathrm{B} = (b_{ij})$ – $(m \times n)$.

Равенство матриц

$$\boxed{\mathrm{A}=\mathrm{B}} \Leftrightarrow \boxed{a_{ij} = b_{ij},\ \forall i = 1,..m,\ \forall j = 1,...n}$$

Сложение матриц

Результатом ***сложения матриц*** A и B называется матрица C, элементы которой являются суммой соответствующих элементов исходных матриц.

$$\boxed{\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

Умножение матрицы на число

$$\boxed{\mathrm{C} = k\mathrm{A}} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij} = k \cdot a_{ij}}$$

Умножение матриц

Пусть $A=(a_{ij})$ размера $(m\times p)$, $B=(b_{ij})-(p\times n)$,
тогда их произведением называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $(m\times n)$:

$$\boxed{C=AB} \Leftrightarrow \boxed{c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}.$$

Правило умножения матриц

1. Перемножать можно лишь матрицы согласованных размеров (число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B).
2. Размер матрицы C равен произведению числа строк матрицы A на число столбцов матрицы B, т.е. $(m\times n)$.
3. Чтобы получить элемент матрицы произведения c_{ij}, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца следует перемножить соответствующие элементы i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B и найти сумму полученных произведений.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\3&0&0\end{pmatrix}.$$

1°. $A+B=\begin{pmatrix}1&2&4\\6&6&6\\10&8&9\end{pmatrix}$.

2°. $2B=\begin{pmatrix}0&0&2\\4&2&0\\6&0&0\end{pmatrix}$.

3°. $AB=C$, $C-(3\times 3)$.

$c_{11}=1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 3=13$,

$c_{12}=1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 0=2$,

$c_{13}=\ldots$

…

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 1 \\ 28 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения

Рассмотрим матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ – размера $(m \times n)$.

1°. $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (ассоциативность сложения).

Свойства операций умножения матрицы на число и умножения матриц

(Напоминаем о необходимости согласования размеров перемножаемых матриц)

1°. $AB \neq BA$ (коммутативность умножения в общем случае не выполняется).

Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются ***перестановочными***.

Примеры перестановочных матриц

а) $A \cdot A = A \cdot A$

б) $A \cdot E = E \cdot A$

в) $A \cdot O = O \cdot A$

O – ***нулевая матрица*** (все элементы равны нулю). В общем случае матрица O может иметь произвольную размерность, но в данном примере ее размерность согласована с размерностью матрицы A.

2°. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность умножения).

3°. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность).

4°. $k(A + B) = kA + kB$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц).

5°. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$.

6°. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

7°. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, если A и B – квадратные матрицы.

2.2. Обратная матрица

Определение

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Отсюда следует, что A и A^{-1} – квадратные.

Определение

Если $\det A \neq 0$, матрица A называется ***невырожденной***, в противном случае A называется ***вырожденной*** матрицей.

Теорема (существования и единственности обратной матрицы)

Для всякой невырожденной матрицы существует и единственна обратная матрица

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T}},$$

где $A^{\vee}$ – присоединенная матрица (составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A: каждый элемент матрицы $A^{\vee}$ является алгебраическим дополнением соответствующего элемента матрицы A).

Доказательство

1) *Существование*

По условию, A – невырожденная матрица, следовательно, числовой множитель в формуле определен. Составление матрицы $A^{\vee}$ и ее транспонирование возможно для любой квадратной матрицы. Таким образом, матрица $\frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T}$ существует для любой невырожденной матрицы.

Является ли построенная матрица обратной к A?

Рассмотрим произведение $\left(\frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^{T}\right) \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \left(\left(A^{\vee}\right)^{T} \cdot A\right) =$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \right).$$

При умножении

i-й строки первой матрицы на j-й столбец второй получим $\sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ (воспользовались свойствами 8°, 9° определителей, см. Лекцию 1). Окончательно получим,

$$\left(\frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^{T}\right) \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = E .$$

Аналогично вычисляется произведение $A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^{T}\right)$.

Таким образом,

$$\left(\frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^{T}\right) \cdot A = A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \left(A^{\vee}\right)^{T}\right) = E \Rightarrow \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T} = A^{-1}$$

(по определению обратной матрицы).

2) *Единственность*

Допустим, что кроме A^{-1} существует A_1^{-1}, построенная отличным от указанного выше способом (ясно, что при использовании формулы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \left(A^{\vee}\right)^{T}$ получается одна единственная матрица). Составим выражение $A\left(A^{-1} - A_1^{-1}\right)$. Преобразуем его, используя свойства операций над матрицами и определение обратной матрицы $A\left(A^{-1} - A_1^{-1}\right) = AA^{-1} - AA_1^{-1} = E - E = O$.

Таким образом, $A\left(A^{-1} - A_1^{-1}\right) = O$.

Умножим это равенство слева на обратную матрицу, например, на A^{-1}:

$A^{-1}A\left(A^{-1} - A_1^{-1}\right) = A^{-1}O$, преобразуем

$E\left(A^{-1} - A_1^{-1}\right) = O$,

$A^{-1} - A_1^{-1} = O$,

$A^{-1} = A_1^{-1}$, что и требовалось доказать.

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, A^{-1} – ?

Решение

1. $\det A$ – ?

   $\det A = -2 \neq 0 \Rightarrow$ существует единственная A^{-1}.

2. $A^{\vee}$ – ?

   $$A^{\vee} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. $(A^{\vee})^{T}$ – ?

   $$(A^{\vee})^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. A^{-1} – ?

   $$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2.3. Решение матричных уравнений

Пусть A – известная квадратная матрица порядка n,
X – неизвестная матрица размера $(n \times m)$,
B – известная матрица размера $(n \times m)$.

$$AX = B \text{ –}$$

– матричное уравнение относительно X.

Если A – невырожденная матрица, то существует и единственно решение уравнения $AX = B$.

Чтобы найти решение, умножим обе части уравнения <u>слева</u> на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Получим

$$EX = A^{-1}B.$$

Откуда следует

$$X = A^{-1}B.$$

Аналогично ставятся и решаются задачи для уравнений вида:

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1},$$

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB.$$

2.4. Невырожденные системы n линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – $(n \times 1)$ – столбец неизвестных,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – $(n \times n)$ – матрица коэффициентов перед неизвестными,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – $(n \times 1)$ – столбец свободных членов.

Тогда система уравнений (*) может быть записана в форме матричного уравнения

$$A \cdot X = B. \qquad (**)$$

Если $\det A \neq 0$, существует и единственно решение матричного уравнения (**)

$$X = A^{-1}B, \qquad (1)$$

или в поэлементной записи

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},} \qquad (2)$$

где $\Delta = \det A$ – главный определитель системы; Δ_i – определитель, полученный из главного путем замены i-го столбца столбцом свободных членов (формулы (2) называются ***формулами Крамера***).

Подробнее

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Вывод

Если главный определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то существует и единственно решение такой системы. Оно может быть найдено одним из трех способов:

1) матричным способом;
2) по формулам Крамера;
3) методом Гаусса (приведение системы к треугольному виду).

Алгоритм реализации последнего совпадает с алгоритмом приведения определителя к треугольному виду.

II. Алгебра векторов

Лекция 3. Векторы, линейная зависимость векторов

Содержание

1. Вектор. Линейные операции над векторами.
2. Линейная зависимость векторов.

3.1. Вектор. Линейные операции над векторами

Определение

Вектор – направленный отрезок; его характеристики – длина, направление.

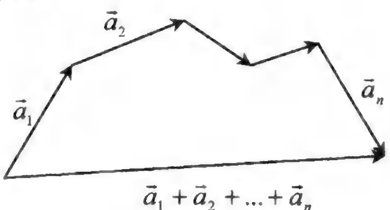
Следующие базовые понятия: ***нулевой*** вектор; ***коллинеарные*** векторы; ***компланарные*** векторы, ***равные*** векторы (см. школьный курс).

Линейные операции над векторами

I. Сложение векторов

Геометрическое *определение* операции сложения векторов – обобщение *правила треугольника* и *правила параллелограмма*:

Суммой векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ называется вектор, идущий из начала $\vec{a}_1$ в конец вектора $\vec{a}_n$ при условии: конец предыдущего вектора совпадает с началом последующего.



II. Умножение вектора на число

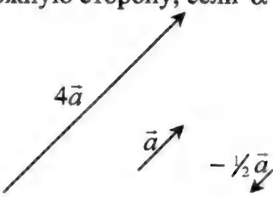
Определение – геометрическое

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** α называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям:

1) *длина* вектора $\vec{b}$ равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа α

$$|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|;$$

2) *направление* вектора $\vec{b}$ (при $\vec{a} \neq \vec{0}$): сонаправлен с $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и направлен в противоположную сторону, если $\alpha < 0$.



Замечание

$\alpha\vec{a} \parallel \vec{a}$ (в случае $\alpha \neq 0$ следует непосредственно из пункта 2) данного определения; при $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$ – из определения коллинеарных векторов).

Свойства линейных операций над векторами

(следуют из определений)

1) ***Сложение***

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения);

б) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность);

в)* $\forall \vec{a}\ \exists \vec{a}' = -\vec{a}$ ($\vec{a}'$ – ***противоположный*** вектор), такой, что $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.

г) $\forall \vec{a}\ \ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

2) ***Умножение вектора на число***

Пусть α, β – произвольные действительные числа.

а) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);

б) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);

в) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность относительно чисел);

г)* $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (особая роль числового множителя 1).

3.2*. Линейная зависимость векторов

Определение 1

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ называется выражение вида $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, где α_i – действительные числа.

Определение 2

Линейная комбинация называется ***тривиальной***, если $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ (**все** коэффициенты равны нулю).

Если среди коэффициентов в линейной комбинации есть **хотя бы один**, отличный от нуля, то она называется ***нетривиальной***.

Определение 3

Система векторов называется

линейно зависимой (ЛЗ), если для нее существует нетривиальная линейная комбинация, равная $\vec{0}$;

линейно независимой (ЛНЗ), если для нее не существует нетривиальной линейной комбинации, равной $\vec{0}$.

Свойства линейной зависимости

1°. *Если* среди векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ есть нулевой,
то такая система ЛЗ.

Доказательство

Рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, где, например, $\vec{a}_1 = \vec{0}$.

Составим выражение $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$,

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$.

Очевидно, что такая система является ЛЗ (определение 3).

2°. *Если* часть векторов системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ЛЗ,
то вся система ЛЗ.

Доказательство

Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ $(k < n)$ – ЛЗ. Тогда, по определению ЛЗ, для нее существует нетривиальная линейная комбинация.

Составим нулевую комбинацию:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = \vec{0}, \quad (*)$$

где среди α_1, α_2, ..., α_k есть ненулевые.

Рассмотрим $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k + \alpha_{k+1}\vec{a}_{k+1} + ... + \alpha_n\vec{a}_n$, где α_1, α_2, ..., α_k удовлетворяют (*) (т.е. те же самые, что в (*)), а остальные коэффициенты равны нулю. Тогда $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, а среди α_i есть ненулевые, таким образом, вся система ЛЗ по определению 3.

3°. Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ является ЛЗ тогда и только тогда, когда один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Замечание

"тогда и только тогда" ≡ "в том и только в том случае" ≡ "необходимым и достаточным условием ЛЗ является" ≡ "критерий ЛЗ" ≡ "Т. 1 + Т. 2", где Т. 1 – прямая теорема (необходимое условие), Т. 2 – обратная теорема (достаточное условие).

Доказательство

Прямая теорема

Если система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ является ЛЗ,

то один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Доказательство

По условию существует $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, где есть $\alpha_i \neq 0$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$ (аналогично для любого другого α_i), тогда $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\vec{a}_3 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{a}_n$ или

$$\boxed{\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + ... + \beta_n\vec{a}_n}, \text{ где } \beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}.$$

Что и требовалось доказать.

Обратная теорема

Если один из векторов системы является линейной комбинацией остальных,
то $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – ЛЗ.

Доказательство

По условию

$\vec{a}_1 = \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3 + ... + \beta_n\vec{a}_n$,

$\vec{a}_1 - \beta_2\vec{a}_2 - \beta_3\vec{a}_3 - ... - \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Получили нулевую линейную комбинацию. Ее коэффициенты: 1, $-\beta_2$, $-\beta_3, \ldots, -\beta_n$ – среди них есть ненулевой $\Rightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ – ЛЗ.

Геометрические критерии линейной зависимости векторов

1°. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность.

Доказательство

Необходимое условие (прямая теорема)

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ – ЛЗ,
то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны.

Доказательство

По условию существует $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$, где, например, $\alpha \neq 0$. Разделим равенство на α и выразим $\vec{a}$.

$\vec{a} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\vec{b}$ $\Rightarrow$ коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

(см. определение умножения вектора на число и определение равенства векторов).

Достаточное условие (обратная теорема)

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ – коллинеарны,
то $\vec{a}$, $\vec{b}$ – ЛЗ.

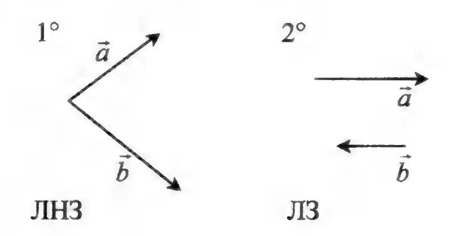
Доказательство

Из коллинеарности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ (доказать самостоятельно).

Последнее равенство является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с коэффициентами 1 и $-\lambda$ ($1 \neq 0$). Отсюда следует, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ЛЗ.

Следствие

Если два вектора неколлинеарны, то они ЛНЗ.



2°. Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланарность.

Доказательство

Рассмотрим самый общий случай: среди $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ нет нулевых и коллинеарных векторов, когда ЛЗ является очевидной.

Необходимое условие

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ЛЗ,

то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны.

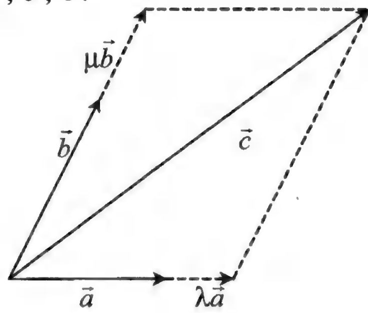
Доказательство

Из условия ЛЗ следует существование нетривиальной нулевой линейной комбинации $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ где, например, $\gamma \neq 0$. Тогда, $\vec{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{a} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{b}$,

$$\boxed{\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}},\ \lambda = -\frac{\alpha}{\gamma},\ \mu = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Геометрическая интерпретация

Параллелограмм – плоская фигура (по определениям линейных операций над векторами) $\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.



Достаточное условие

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны,
то $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ЛЗ.

Доказательство

Доказательство легко выполнить, начиная рассуждения с рассмотрения предыдущего рисунка.

Следствие

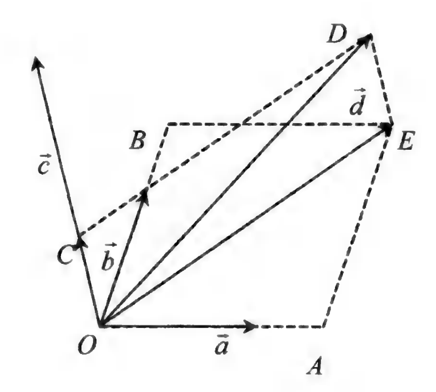
Некомпланарная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ЛНЗ.

Теорема

Любые четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ являются ЛЗ.

Доказательство

Рассматриваем самый общий случай: среди $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ нет нулевых, нет коллинеарных и компланарных векторов (см. свойства и геометрические критерии ЛЗ). Дальнейшие рассуждения строятся в той же последовательности, что и при доказательстве достаточного условия компланарности трех векторов, то есть от чертежа.



Лекция 4. Линейные операции над векторами

Содержание

1. Базис. Координаты вектора.
2. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
3. Проекция вектора на ось.

4.1. Базис. Координаты вектора

Определение 1

Базисом множества векторов ***на плоскости*** называются два ЛНЗ вектора, взятых в определенном порядке.

Следствие из определения 1 и геометрического критерия 1 (Лекция 3)

Любая пара неколлинеарных векторов может служить базисом на плоскости.

Определение 2

Базисом множества векторов ***в пространстве*** называются три ЛНЗ вектора, взятых в определенном порядке.

Следствие из определения 2 и критерия 2 (Лекция 3)

Любая тройка некомпланарных векторов может служить базисом в пространстве.

Теорема (о единственности разложения вектора по базису)

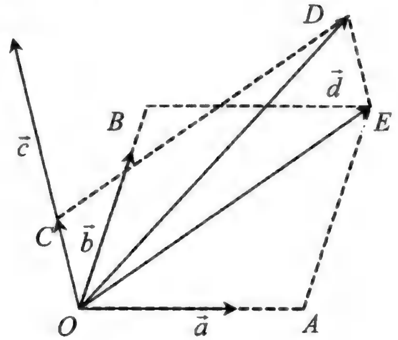
Любой вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов (разложен по базису) единственным образом.

Доказательство

1. Начнем с доказательства *возможности* разложения.

Рассмотрим тройку $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – базис векторов в пространстве. Пусть $\vec{d}$ – любой вектор в пространстве.

Чертеж: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ задают плоскость α. Из точки D проводим линию, параллельную вектору $\vec{c}$, до пересечения с плоскостью α в точке E.



Далее $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{OE}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$,

$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

2. Требует доказательства и *единственность* разложения.

Предположим, что можно разложить $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ двумя способами: $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c}$ и $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}$.

Из одного равенства вычтем другое:

$$\begin{array}{r} \vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} \\ - \\ \vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \\ \hline \vec{0} = (\lambda - \lambda_1)\vec{a} + (\mu - \mu_1)\vec{b} + (\gamma - \gamma_1)\vec{c} \end{array}$$

– нулевая тривиальная линейная комбинация ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ЛНЗ) с коэффициентами $(\lambda-\lambda_1)$, $(\mu-\mu_1)$, $(\gamma-\gamma_1)$. Все они равны нулю, т.к. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$, $\gamma=\gamma_1$ – что означает единственность разложения.

Определение

Числа λ, μ, γ в разложении $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$, т.е. $\boxed{\vec{d}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\gamma\vec{c}}$, называются ***координатами*** (компонентами) $\vec{d}$ в базисе $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Замечание

Допустима запись $\vec{d}=(\lambda,\mu,\gamma)$.

Следствие

Два вектора, заданные в одном и том же базисе, равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты.

$$\boxed{\vec{d}_1=\vec{d}_2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1,\gamma=\gamma_1}$$

Замечание

Аналитическое сравнение векторов возможно только в том случае, когда векторы заданы в одном базисе.

4.2. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

I. Сложение

Теорема

Если $\vec{d}_1=(\lambda_1,\mu_1,\gamma_1)$, $\vec{d}_2=(\lambda_2,\mu_2,\gamma_2)$ – в одном базисе,

то

$$\boxed{\vec{d}_1+\vec{d}_2=(\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2,\gamma_1+\gamma_2)} \text{ в том же базисе.}$$

Доказательство

Пусть базис – $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

По условию:

$$\begin{array}{r} \vec{d}_1 = \lambda_1\vec{a} + \mu_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c} \\ + \quad \vec{d}_2 = \lambda_2\vec{a} + \mu_2\vec{b} + \gamma_2\vec{c} \\ \hline \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{b} + (\gamma_1 - \gamma_2)\vec{c} \end{array}$$

т.е. $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \gamma_1 + \gamma_2)$.

II. Умножение вектора на число

Теорема

Если $\vec{d} = (\lambda, \mu, \gamma)$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$,

то $\vec{d}\alpha = \alpha\vec{d} = (\lambda\alpha, \mu\alpha, \gamma\alpha)$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Условие коллинеарности двух векторов

Теорема (критерий коллинеарности)

Два вектора, заданные в одном базисе, коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их соответствующие координаты

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

Доказательство

Необходимость

Если $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ – коллинеарны,

то

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

где $\vec{d}_1 = (\lambda_1, \mu_1, \gamma_1)$, $\vec{d}_2 = (\lambda_2, \mu_2, \gamma_2)$.

По условию $\vec{d}_1 = \alpha\vec{d}_2$ или

$$(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1) = \alpha(\lambda_2, \mu_2, \gamma_2),$$

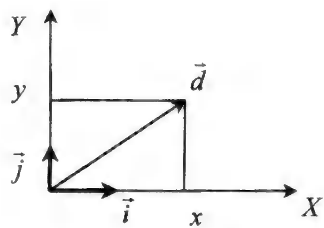
$$(\lambda_1, \mu_1, \gamma_1) = (\alpha\lambda_2, \alpha\mu_2, \alpha\gamma_2),$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha\lambda_2\\ \mu_1 &= \alpha\mu_2 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.\\ \gamma_1 &= \alpha\gamma_2\end{aligned}$$

Обратную теорему предоставляется сформулировать и доказать самостоятельно.

Определение

Декартовым прямоугольным базисом на плоскости называется пара упорядоченных перпендикулярных (ортогональных) векторов единичной длины – $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.



$\boxed{\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j}}$, x, y – ***декартовы координаты вектора*** $\vec{d}$.

$\vec{d} = (x, y)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Определение

Декартовым прямоугольным базисом в пространстве называется упорядоченная тройка взаимно ортогональных векторов единичной длины – $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

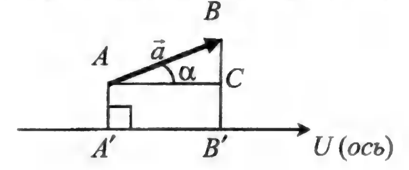
$\boxed{\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$, здесь x, y, z – ***декартовы координаты вектора*** $\vec{d}$.

$\vec{d} = (x, y, z)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

4.3. Проекция вектора на ось

Определение

Проекцией вектора $\vec{a}$ ***на ось*** U называется «величина» направленного отрезка $A'B'$ (длина отрезка со знаком (см. рисунок)).



Теорема

Проекция вектора $\vec{a}$ на ось U равна числу

$$np_U\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha .$$

Доказательство

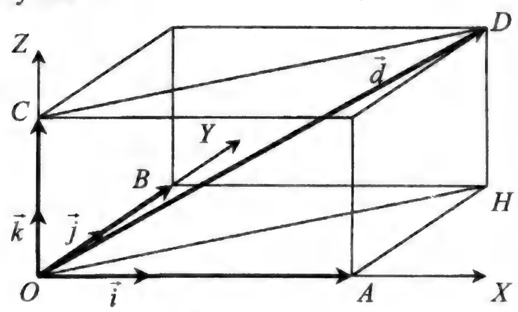
См. ΔABC (прямоугольный).

Геометрический смысл декартовых координат

Пусть вектор $\vec{d} = (x, y, z)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – разложение вектора по базису (разложение по трем векторам).

Рассмотрим рисунок.



$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$z = OC = np_{\vec{k}}\vec{d} = np_{OZ}\vec{d}$,

$$y = OB = np_{\bar{j}}\vec{d} = np_{OY}\vec{d},$$

$$x = OA = np_{\bar{i}}\vec{d} = np_{OX}\vec{d}.$$

Вывод

Декартовы координаты вектора являются проекциями этого вектора на соответствующие координатные оси (подчеркнем, что высказывание справедливо только для декартовых координат).

Пусть

$$\alpha = \left(\vec{d}, \hat{OX}\right),$$

$$\beta = \left(\vec{d}, \hat{OY}\right),$$

$$\gamma = \left(\vec{d}, \hat{OZ}\right) -$$

– углы между вектором $\vec{d}$ и координатными осями.

По теореме о проекции вектора на ось

$$x = np_{OX}\vec{d} = \left|\vec{d}\right|\cos\alpha,$$

$$y = np_{OY}\vec{d} = \left|\vec{d}\right|\cos\beta,$$

$$z = np_{OZ}\vec{d} = \left|\vec{d}\right|\cos\gamma.$$

Из чертежа видно, что

$$\boxed{\left|\vec{d}\right| = OD = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} -$$

– ***формула вычисления длины вектора*** по его декартовым координатам (справедлива только для декартовых координат).

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ –

– направляющие косинусы вектора $\vec{d}$.

При возведении в квадрат и почленном сложении последних равенств получается основное тождество для направляющих косинусов

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Вывод

Декартовы координаты вектора позволяют аналитически найти все его характеристики: длину и направление.

Лекция 5. Скалярное и векторное произведения векторов

Содержание

1. Скалярное произведение векторов.
2. Векторное произведение двух векторов.

5.1. Скалярное произведение двух векторов

Определение

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right) \equiv \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).}$$

По теореме о проекциях из определения скалярного произведения следует:

$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}|\,пр_{\vec{a}}\vec{b},}$$
$$\boxed{\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{b}|\,пр_{\vec{b}}\vec{a}.} \qquad (*)$$

Алгебраические свойства скалярного произведения

(все, за исключением 3°, следуют из определения)

1°. $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2°. $\lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\lambda\vec{b})$;

3°. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$ (доказывается с помощью формул (*));

4°. $(\vec{a},\vec{a}) = \vec{a}^2 = \begin{cases} |\vec{a}|^2, \vec{a} \neq \vec{0}, \\ 0, \vec{a} = \vec{0}. \end{cases}$

Перечисленные свойства позволяют выполнять операции скалярного произведения векторов по правилам умножения многочленов.

Геометрические и механические свойства скалярного произведения (применение скалярного произведения к вычислению геометрических и механических характеристик)

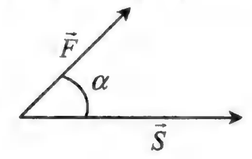
1°. $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ – *длина* вектора;

2°. $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \arccos\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ – *угол* между векторами;

3°. $пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|}$ – *проекция* вектора на вектор;

4°. $\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b}) = 0$ – *ортогональность* векторов (перпендикулярность), при условии, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

5°. $A = (\vec{F},\vec{S})$ – *работа* силы $\vec{F}$ по перемещению на $\vec{S}$.



Формула для вычисления скалярного произведения векторов, заданных декартовыми координатами

Теорема

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,

то

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

Вычислим

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right) = \left|\begin{matrix}\text{алгебраические свойства}\\ \text{скалярного произведения}\end{matrix}\right| =$$

$$= x_1x_2\left(\vec{i},\vec{i}\right) + x_1y_2\left(\vec{i},\vec{j}\right) + x_1z_2\left(\vec{i},\vec{k}\right) + y_1x_2\left(\vec{j},\vec{i}\right) + y_1y_2\left(\vec{j},\vec{j}\right) + \ldots =$$

$$= x_1x_2\left(\vec{i},\vec{i}\right) + y_1y_2\left(\vec{j},\vec{j}\right) + z_1z_2\left(\vec{k},\vec{k}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

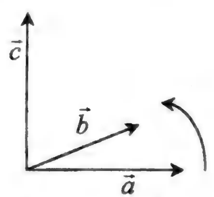
Следствия

1. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$;
2. $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \perp \vec{b}$.

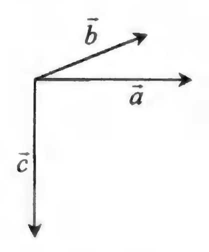
5.2. Векторное произведение двух векторов

Определение

Тройка векторов $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ называется ***правой***, если кратчайший поворот первого вектора ко второму вектору виден из конца третьего вектора осуществляющимся против часовой стрелки.



$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ – правая тройка векторов, $\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$ – левая тройка векторов.



$(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – правая тройка векторов, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая тройка векторов.

Замечание

Перестановка местами двух векторов тройки меняет ее ориентацию. Циклическая перестановка векторов тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ не меняет ориентации тройки.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$:

1°. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$;

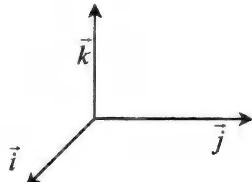
2°. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3°. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая тройка векторов.

Обозначение

$$\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \equiv [\vec{a}, \vec{b}].$$

Пример



$[\vec{i} \times \vec{i}] = \vec{0}$, $[\vec{i} \times \vec{k}] = -\vec{j}$, $[\vec{i} \times \vec{j}] = \vec{k}$.

Отметим, что базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ является правым.

Алгебраические свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$.

2°. $\lambda[\vec{a} \times \vec{b}] = [\lambda\vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \times \lambda\vec{b}]$.

3°. $[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}]$.

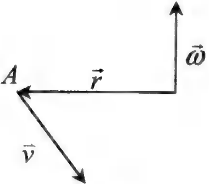
4°. $\forall \vec{a}$ $[\vec{a} \times \vec{a}] = \vec{0}$.

Геометрические и механические свойства векторного произведения

1°. $\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right| = S_{\text{параллелограмма}}$, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$.

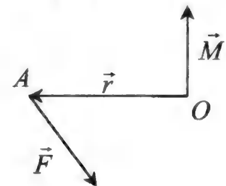
2°. $\vec{a}\|\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=0$ – критерий коллинеарности двух векторов.

3°. $\vec{v}=\left[\vec{w}\times\vec{r}\right]$ – связь линейной и угловой скорости вращения точки A вокруг оси (см. рисунок).



Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор точки A,
$\vec{v}$ – линейная скорость точки A,
$\vec{w}$ – угловая скорость вращения.

4°. $\vec{M}=\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]$ – формула для вычисления момента силы (см. рисунок).



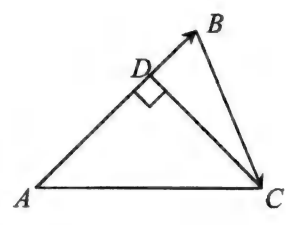
Здесь A – точка приложения силы,
$\vec{r}$ – радиус-вектор точки A,
$\vec{M}$ – момент силы $\vec{F}$.

Пример

В ΔABC : $\overrightarrow{AB}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{m}-3\vec{n}$.

$|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=4$, $\angle(\vec{m},\vec{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

Найти длину высоты, опущенной из вершины C.



Решение

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right]\right|, \\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CD\cdot AB. \end{cases}$$

Из нее следует

$$\boxed{CD = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right]\right|}{AB}}.$$

Осталось выполнить необходимые вычисления.

1°. $\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right] = \left[(2\vec{m}+\vec{n})\times(\vec{m}-3\vec{n})\right] =$
$= [2\vec{m}\times\vec{m}] + [\vec{n}\times\vec{m}] - 6[\vec{m}\times\vec{n}] - 3[\vec{n}\times\vec{n}] = 7[\vec{n}\times\vec{m}]$,

$\left|\left[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right]\right| = 7\left|[\vec{n}\times\vec{m}]\right| = 7\cdot4\cdot2\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 28\sqrt{3}$.

2°. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(2\vec{m}+\vec{n})\right| = \sqrt{(2\vec{m}+\vec{n})^2} = \sqrt{4\vec{m}^2 + 4\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2} = \sqrt{16+16+16} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $CD = 7$.

Формула вычисления векторного произведения в декартовых координатах

Теорема

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$,
то

$$\boxed{\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}.$$

Доказательство

Рассмотрим правую часть формулы, выполнив разложение определителя по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right) - \vec{j}\left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right) + \vec{k}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right).$$

Вычисление левой части с использованием алгебраических свойств векторного произведения приводит к тому же результату.

Лекция 6. Смешанное произведение трех векторов

Содержание

1. Смешанное произведение трех векторов.
2. Предмет аналитической геометрии.

6.1. Смешанное произведение трех векторов

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число

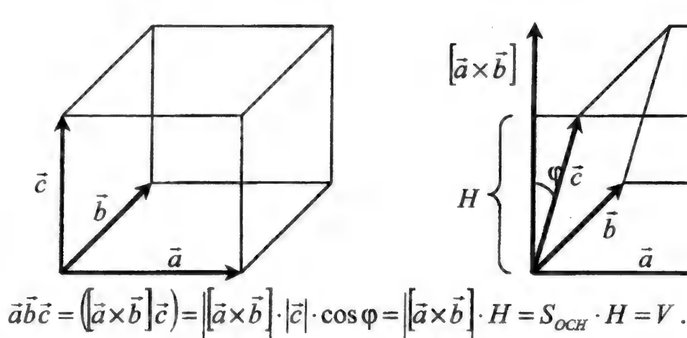
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\vec{c}\right).$$

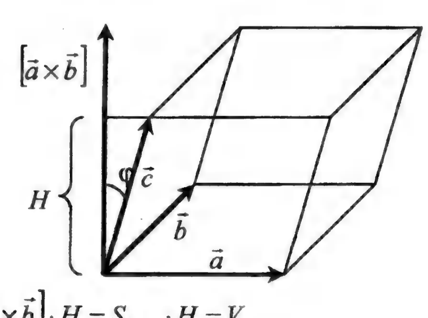
Теорема (о геометрическом смысле смешанного произведения)

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{cases} V \text{ – объем параллелепипеда, построенного на } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \\ \qquad \text{(если тройка правая)}, \\ 0 \text{ – если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны}, \\ -V \text{ – для левой тройки}. \end{cases}$$

Доказательство

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка векторов. Рассмотрим рисунок.





$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\vec{c}\right) = \left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi = \left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|\cdot H = S_{OCH}\cdot H = V .$$

Следствие

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Формула вычисления смешанного произведения в декартовых координатах

Теорема

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие 1

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя третьего порядка (см. теорему).

Следствие 2

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов, заданных декартовыми координатами, является равенство нулю того же определителя.

Свойство смешанного произведения

Перестановка местами двух сомножителей меняет его знак, а циклическая перестановка сомножителей не меняет знака смешанного произведения.

III. Аналитическая геометрия

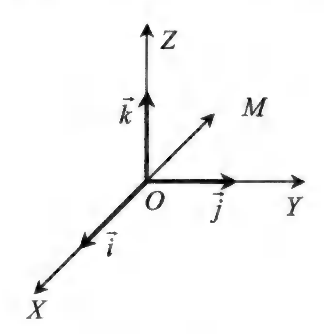
Лекция 6 (продолжение). Начала аналитической геометрии

6.2. Предмет аналитической геометрии

Предмет аналитической геометрии – изучение геометрических объектов средствами аналитического метода.
Геометрические объекты: точка, линия, поверхность, тело.

Простейший геометрический объект – точка – аналитически задается набором чисел (одного для точки на прямой, двух для точки на плоскости, трех – в пространстве). Эти числа называются *координатами точки.* В аналитической геометрии используется много различных систем координат: декартова, полярная, цилиндрическая, сферическая, ... Наиболее употребительна декартова прямоугольная система координат.

Определение
Декартова система координат – совокупность точки O и декартова прямоугольного базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; OX, OY, OZ – координатные оси.



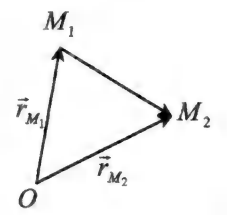
Рассмотрим точку M. Ее можно задать вектором $\vec{r}_M \equiv \overrightarrow{OM}$ (радиус-вектор точки M), $\vec{r}_M = (x, y, z)$.

Определение

Декартовыми координатами точки M называются декартовы координаты ее радиус-вектора.

$$\vec{r}_M = (x, y, z) \Rightarrow \boxed{M(x, y, z)}$$

Рассмотрим две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Сконструируем вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)} -$$

– *правило* нахождения вектора по координатам начала и конца (из координат конца вычесть координаты начала вектора).

Последнее справедливо только для декартовых координат.

Более сложные геометрические объекты задаются уравнениями (или неравенствами), связывающими координаты точек, образующих эти объекты.

Линия на плоскости

Пусть π – некоторая плоскость. На ней задана декартова система координат. L – некоторая линия на плоскости π.

$M(x, y) \in \pi$. Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение вида (*) задает на плоскости линию L, если для любой точки M, принадлежащей L, уравнение (*) верно, а для любой точки $M \notin L$, уравнение (*) не верно:

$$\forall M(x, y) \in L \Rightarrow \Phi(x, y) \equiv 0,$$

$$\forall M(x, y) \notin L \Rightarrow \Phi(x, y) \neq 0.$$

Линия L – геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению (*).

Пример
Уравнение $L:\ x^2 + y^2 - r^2 = 0$ задает на плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом r. Точка $A(r,0) \in L$, точка $O(0,0) \notin L$.

Замечание
Не всякое уравнение (*) задает на плоскости линию.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ задает точку, а уравнение $x^2 + y^2 + r^2 = 0$ вообще не имеет геометрического образа.

Поверхность в пространстве

Пусть Q – некоторая поверхность в пространстве, где введена декартова система координат $OXYZ$.
$M(x, y, z)$ – точка пространства.

Уравнение

$$\boxed{\Phi(x, y, z) = 0} \qquad (**)$$

задает в пространстве поверхность Q, если для любой точки $M(x, y, z) \in Q$ уравнение (**) обращается в верное равенство, и для любой точки $M \notin Q$ уравнение (**) не верно.

Пример
Уравнение $Q:\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ задает в пространстве сферу с центром в начале координат и радиусом r. Точка $A(r,0,0) \in Q$, точка $B(0,r,0) \in Q$, точка $O(0,0,0) \notin Q$.

Замечание
Не всякое уравнение (**) задает в пространстве поверхность.

Линия в пространстве

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Q_1 : \Phi_1(x, y, z) = 0, \\ Q_2 : \Phi_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (***)$$

Система (***) – задает геометрическое место точек, принадлежащих и Q_1, и Q_2, в частном случае – *линию пересечения двух поверхностей*.

Пример

Система

$$\begin{cases} Q_1 : x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ Q_2 : z = 0 \end{cases}$$

задает окружность с центром в начале координат и радиусом r, лежащую в плоскости OXY и являющуюся линией пересечения сферы Q_1 и плоскости Q_2.

Параметрические уравнения линии и поверхности

Линию L можно трактовать как траекторию движения точки $M(x, y, z)$

$$L : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \text{ – время – } \textit{параметр} \text{ (один!)},$$

т.е. геометрическое место положений точки, осуществляющей движение в пространстве (движение осуществляется за счет изменения параметра t).

Пример

Определить линию, заданную системой уравнений с параметром t,

$$L : \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \\ z = 0. \end{cases}$$

Если возвести в квадрат первые два уравнения и сложить их почленно, то система принимает вид

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

из которого становится очевидным, что речь идет об окружности с центром в начале координат и радиусом r, лежащей в плоскости OXY.

Аналогично поверхность Q – геометрическое место положений точки, одновременно участвующей в *двух независимых движениях*

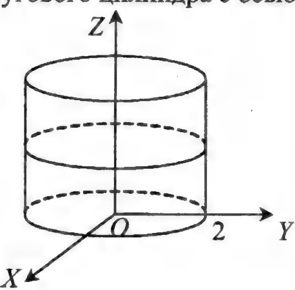
$$Q:\begin{cases} x = x(p,q), \\ y = y(p,q), \quad p\,,\ q\ \text{– \textit{параметры} (два!)}, \\ z = z(p,q). \end{cases}$$

Пример

Определить геометрический объект, задаваемый системой уравнений с параметрами p, t

$$Q:\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = p. \end{cases}$$

Данная система задает поверхность, которая является геометрическим местом положений точки, участвующей в двух независимых движениях: движении по окружности в плоскости, параллельной плоскости OXY, и поступательном движении в направлении оси OZ, что в итоге порождает боковую поверхность кругового цилиндра с осью OZ и радиусом 2.

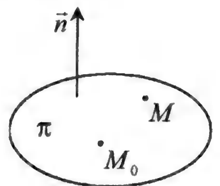


Лекция 7. Плоскость и прямая в пространстве

Содержание

1. Плоскость в пространстве.
2. Прямая в пространстве.

7.1. Плоскость в пространстве



Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка плоскости π ($M_0 \in \pi$).
Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n} \perp \pi$ ($\vec{n}$ – нормальный вектор плоскости).
$M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости π ($M \in \pi$).
Как получить уравнение плоскости?
Искомое уравнение – реализация условия принадлежности произвольной точки M плоскости π.
Условие принадлежности точки M плоскости π:

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0} \text{ –} \qquad (1)$$

– ***векторное уравнение плоскости***, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

С учетом $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, (1) $\Rightarrow$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0} \text{ –} \qquad (2)$$

– ***каноническое уравнение плоскости***, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

(2) $\Rightarrow$

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ –} \qquad (3)$$

– ***общее уравнение плоскости*** ($D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$).

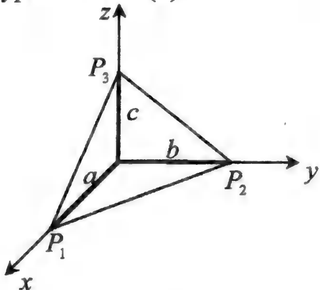
Если $D = 0$, то плоскость π проходит через точку $O(0,0,0)$.

(1) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \text{ –} \qquad (4)$$

– ***уравнение плоскости "в отрезках"*** ($a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$).

Легко убедиться, что точки $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$ принадлежат плоскости, задаваемой уравнением (4).



Из рисунка видно, что a, b, c – "отрезки", отсекаемые плоскостью на координатных осях.
Форма (4) особенно удобна для графического изображения плоскости.

Пример
Уравнение $4x+2y+z=4$ задает плоскость, отсекающую на осях OX, OY, OZ "отрезки" 1, 2 и 4 соответственно, что устанавливается приведением уравнения к форме (4) при помощи деления обеих частей уравнения на 4

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1.$$

Угол между двумя плоскостями

Пусть заданы уравнения двух плоскостей:

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Тогда угол между плоскостями можно вычислить, используя угол между их нормальными векторами

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}.$$

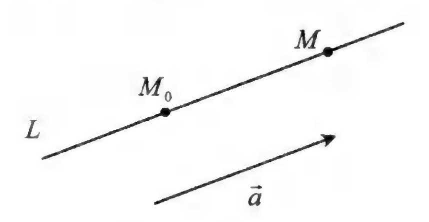
Условие ортогональности двух плоскостей

$$\boxed{\pi_1 \perp \pi_2} \Leftrightarrow \boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}$$

Условие параллельности двух плоскостей

$$\boxed{\pi_1 \parallel \pi_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

7.2. Прямая в пространстве



Пусть L – некоторая прямая.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка прямой.

$M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой.

$\vec{a} = (l, m, n)$ – направляющий вектор прямой: $\vec{a} \parallel L$.

Условие принадлежности точки $M(x, y, z)$ прямой L:

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}.}$$

Связь коллинеарных векторов

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}} - \qquad (*)$$

– ***векторное уравнение прямой.***

Отсюда следует

$$\boxed{\overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_{M_0}} + t\vec{a}} - \qquad (**)$$

– другая форма ***векторного уравнения прямой.***

Условие коллинеарности двух векторов приводит к уравнениям

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}} -$$

– ***канонические уравнения прямой.***

Условие равенства двух векторов приводит к уравнениям

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}} -$$

– параметрические уравнения прямой.

Следующая система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (***)$$

задает ***общие уравнения прямой***, по которой пересекаются две плоскости, при условии их непараллельности, т.е. $\overrightarrow{n_1} \neq t\overrightarrow{n_2}$, где $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Последнее неравенство означает непропорциональность соответствующих коэффициентов в уравнениях системы (***).

Угол между двумя прямыми

$$\cos\alpha = \frac{\left|\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{a_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{a_2}\right|}$$

Если $\overrightarrow{a_1} = (l_1, m_1, n_1) \parallel L_1$, $\overrightarrow{a_2} = (l_2, m_2, n_2) \parallel L_2$, то

$$\cos\alpha = \frac{\left|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть

$\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор некоторой плоскости π,

$\vec{a} = (l, m, n)$ – направляющий вектор прямой L.

Тогда, определяя угол между прямой и плоскостью, как острый угол между прямой и ее проекцией на плоскость, можно получить формулу для его вычисления

$$\sin\alpha = \frac{\left|Al + Bm + Cn\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности двух прямых

$$\boxed{L_1 \parallel L_2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{a_1} \parallel \overrightarrow{a_2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Условие перпендикулярности двух прямых

$$\boxed{L_1 \perp L_2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{a_1} \perp \overrightarrow{a_2}} \Leftrightarrow \boxed{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0}$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$\boxed{L \parallel \pi} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} \perp \vec{n}} \Leftrightarrow \boxed{Al + Bm + Cn = 0}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\boxed{L \perp \pi} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} \parallel \vec{n}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}}$$

Условие скрещиваемости двух прямых

Определение

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Если точка $M_1 \in L_1$, а точка $M_2 \in L_2$, то условием скрещиваемости L_1 и L_2 является выполнение неравенства

$$\overrightarrow{M_1 M_2}\, \overrightarrow{a_1}\, \overrightarrow{a_2} \neq 0,$$

означающего некомпланарность указанной тройки векторов.

Лекция 8. Кривые второго порядка на плоскости

Содержание

1. Основные понятия.
2. Исследование формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям.
3. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.

8.1. Основные понятия

Определение

Уравнением данной ***кривой на плоскости*** называется такое уравнение с двумя переменными

$$F(x,y)=0, \qquad (1)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, принадлежащей этой кривой, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не принадлежащей этой кривой.

Кривая, определенная данным уравнением, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Определение

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Γ, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (2)$$

где не все коэффициенты A, B, C равны одновременно нулю (в противном случае Γ – прямая, т.е. алгебраическая кривая первого порядка).

В зависимости от значений коэффициентов возможны случаи, когда уравнение (2) определяет *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Например, уравнение $x^2+y^2+1=0$ не имеет решений и задает *пустое множество*, уравнение $x^2+y^2=0$ задает *точку* с координатами $(0,0)$, уравнение $x^2-2x+1=0$ задает на плоскости *прямую* $x=1$, уравнение $x^2-y^2=0$ задает на плоскости *пару прямых* $x=y$ и $x=-y$.

Далее будем рассматривать только невырожденные кривые.

Теорема

Всякое уравнение (2), задающее невырожденную кривую путем преобразования координат, можно привести к ***каноническому виду*** (одному из трех):

I. $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$, где $a\ge b>0$;

II. $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$, где $a,b>0$;

III. $\boxed{y^2=2px}$, где $p>0$.

Замечание

В канонических уравнениях каждая переменная содержится только в одной степени, либо только в первой, либо только во второй.

8.2. Исследование формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям

Последовательно рассмотрим канонические уравнения кривых второго порядка.

1. Эллипс

Определение

Эллипсом называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

В этом уравнении обе переменные содержатся во второй степени. Следовательно, если точка $(x_0,y_0)\in \Gamma$ (Γ – эллипс), то и точки $(-x_0,y_0),(x_0,-y_0),(-x_0,-y_0)\in \Gamma$.

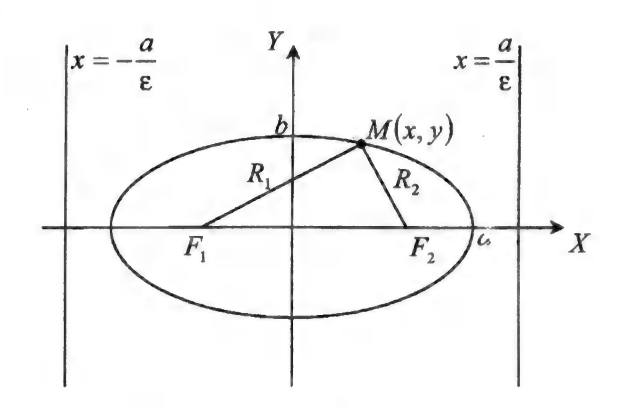
Таким образом, прямые $x=0$ и $y=0$ являются осями симметрии эллипса (уравнения $x=0$ и $y=0$ задают координатные оси OY и OX соответственно). Отсюда следует, что достаточно исследовать форму кривой и построить ее часть в области $x\geq 0$, $y\geq 0$ (первая четверть координатной плоскости), достроив затем остальные части путем зеркального отражения найденных фрагментов кривой относительно координатных осей.

Заметим также, что так как для любой точки (x_0,y_0), принадлежащей эллипсу Γ, существует точка $(-x_0,-y_0)$, также принадлежащая Γ, эллипс, задаваемый каноническим уравнением (I), имеет центр симметрии $O(0,0)$, совпадающий с началом декартовой системы координат.

В первой координатной четверти каноническое уравнение эллипса равносильно следующему:

$$\boxed{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.}$$

Построим соответствующую дугу эллипса по точкам, координаты которых можно вычислить по этому уравнению, и затем используем свойство симметрии для завершения построения всей кривой. Дополним чертеж эллипса некоторыми точками и линиями, важными при обсуждении формы эллипса.



Характеристики эллипса

1. a – *большая полуось*; b – *малая полуось*.
2. Точки $(a,0)$, $(-a,0)$, $(0,b)$, $(0,-b)$ – *вершины*.
3. Точка $O(0,0)$ – *центр*.
4. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – *фокусы*, где $\boxed{c^2=a^2-b^2}$.
5. R_1, R_2 – *фокальные расстояния* точки эллипса.
6. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ – *эксцентриситет* эллипса. Чем больше значение ε, тем больше вытянут эллипс.
7. Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ – *директрисы*.

Замечание

Если $a=b=R$, каноническое уравнение принимает вид

$$\boxed{x^2+y^2=R^2}$$

и задает окружность радиуса R с центром в начале координат $O(0,0)$.

Вычислим значение $(R_1 + R_2)^2 = \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$. После возведения в квадрат, подстановки $c^2 = a^2 - b^2$ и необходимых упрощений получаем

$$\boxed{R_1 + R_2 = 2a.}$$

Вывод

Эллипс является геометрическим местом точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости есть величина постоянная.

Замечание

Последнему высказыванию можно придать статус определения эллипса и тогда, воспользовавшись рисунком, получить каноническое уравнение эллипса.

2. Гипербола

Определение

Гиперболой называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

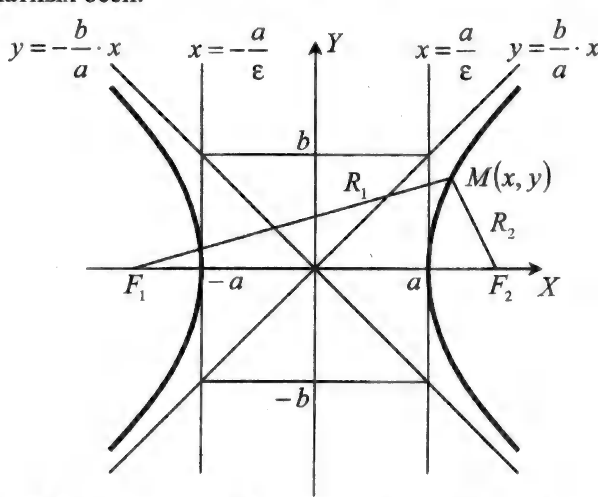
В этом уравнении вновь обе переменные содержатся во второй степени. Следовательно, прямые $x = 0$ и $y = 0$ (координатные оси OY и OX соответственно) являются *осями симметрии* гиперболы. Отсюда, как и в случае эллипса, появляется возможность использования зеркального отражения основного фрагмента кривой, построенного в первой координатной четверти, относительно координатных осей.

Гипербола так же, как и эллипс, имеет *центр симметрии* $O(0,0)$, совпадающий с началом декартовой системы координат.

В первой координатной четверти каноническое уравнение гиперболы равносильно следующему уравнению:

$$\boxed{y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.}$$

Построим график этой функции в области ее определения ($x \geq a$). При $x = a$ значение функции $y = 0$. С увеличением x значения y возрастают. Если x неограниченно возрастает ($x \to \infty$), $\frac{x^2}{a^2} >> 1$, откуда следует $y \approx \frac{b}{a} x$. Другими словами, дуга гиперболы при больших значениях x приближается к прямой $y = \frac{b}{a} x$, причем *снизу*! На рисунке показана вся кривая, полученная с использованием симметрии гиперболы относительно координатных осей.



Выполним необходимые для обсуждения формы гиперболы дополнения чертежа некоторыми точками и линиями.

Характеристики гиперболы

1. a – *действительная полуось*; b – *мнимая полуось*.
2. Точки $(a,0)$, $(-a,0)$ – *вершины*.
3. Точка $O(0,0)$ – *центр*.
4. Точки $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – *фокусы*, где $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
5. R_1, R_2 – *фокальные расстояния* точки гиперболы.

6. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – *эксцентриситет* эллипса. Заметим, что $\varepsilon > 1$.

7. Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – *директрисы.*

8. Прямоугольник со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$, параллельными координатным осям, – *основной прямоугольник.*

9. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ – *асимптоты* гиперболы (диагонали основного прямоугольника).

Замечание

Если в каноническом уравнении гиперболы положить правую часть равной нулю

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0},$$

то результирующее уравнение будет определять *вырожденную гиперболу* (пару прямых $y = \pm\frac{b}{a}x$, являющихся асимптотами данной канонической гиперболы).

Вычислим значение $(R_1 - R_2)^2 = \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$. После возведения в квадрат, подстановки $c^2 = a^2 + b^2$ и необходимых упрощений получаем

$$\boxed{|R_1 - R_2| = 2a}.$$

Вывод

Гипербола является геометрическим местом точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости есть величина постоянная.

Алгоритм построения чертежа гиперболы

1. Построение основного прямоугольника.
2. Построение асимптот-диагоналей.

3. Определение вершин гиперболы (выяснение вопроса о том, какую координатную ось гипербола пересекает).
4. Построение гиперболы.

3. Парабола

Определение
Параболой называется кривая второго порядка с каноническим уравнением

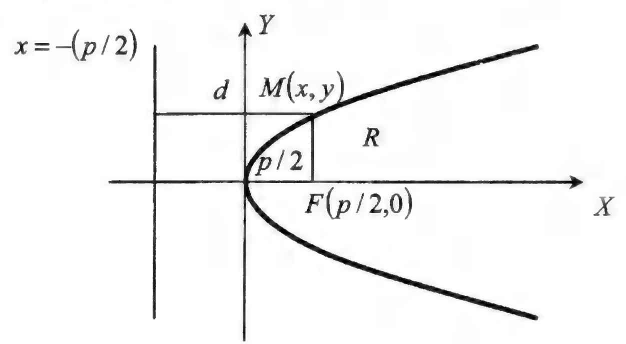
$$\boxed{y^2 = 2px.}$$

В этом уравнении лишь переменная y содержится во второй степени. Следовательно, прямая $y = 0$ (координатная ось OX) является единственной осью симметрии и возможно использование зеркального отражения дуги параболы, построенной в первой четверти, только относительно оси OX для построения всей параболы.
Центр симметрии у параболы отсутствует.

В первой координатной четверти каноническое уравнение параболы равносильно следующему уравнению:

$$\boxed{y = \sqrt{2px}.}$$

Построим график этой функции в области ее определения, воспользуемся симметрией параболы относительно оси абсцисс и дополним чертеж необходимыми элементами.



Характеристики параболы

1. Точка $O(0,0)$ – *вершина.*
2. OX – *ось.*
3. Точки $F(p/2,0)$ – *фокус.*
4. R – *фокальный радиус* точки параболы.
5. Прямая $x=-\dfrac{p}{2}$ – *директриса.*

Пусть d – расстояние от точки параболы до директрисы. Вычислим значение d. Получим

$$\boxed{d=R\,.}$$

Вывод

Парабола является геометрическим местом точек, равноудаленных от фиксированной точки плоскости и фиксированной прямой, принадлежащей той же плоскости.

Канонические уравнения кривых второго порядка со смещенным центром (вершиной)

$$\text{I*.}\ \boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1},\ \text{где}\ a\ge b>0;$$

$$\text{II*.}\ \boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1},\ \text{где}\ a,b>0;$$

$$\text{III*.}\ \boxed{(y-y_0)^2=2p(x-x_0)},\ \text{где}\ p>0.$$

Для построения чертежа выполним замену переменных

$$\boxed{\begin{array}{l} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \end{array}}$$

Тогда уравнения I*-III* перейдут в уравнения вида I–III относительно переменных x', y'. Введение новых переменных эквивалентно введению новой системы координат $O'X'Y'$, которая получается из старой OXY путем параллельного переноса на вектор (x_0, y_0), при котором точка

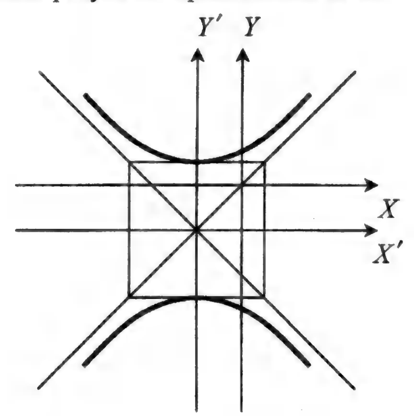
$O(0,0)$ переходит в точку $O'(x_0, y_0)$, а новые оси координат параллельны соответствующим старым осям.

Пример

Определить тип кривой, заданной уравнением $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$. Сделать чертеж.

Решение

Данное уравнение является каноническим уравнением гиперболы со смещенным центром. Построение чертежа начинаем с построения координатных осей двух систем координат. Из уравнения следует, что $O'(-1,1)$. Далее в осях $O'X'Y'$ строим основной прямоугольник с полуоснованием 3 и полувысотой 2. Проводим диагонали основного прямоугольника – асимптоты искомой гиперболы. Вершины гиперболы или точки пересечения гиперболы с осями координат расположены на оси $O'Y'$! Окончательный результат представлен ниже.



8.3. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Напомним, что общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3)$$

Следует отметить два признака неканоничности уравнения второго порядка:

1. В уравнении (3) коэффициент $B \neq 0$ (присутствует слагаемое $2Bxy$).

2. Коэффициенты A и D (C и E) не равны одновременно нулю, т.е. переменная присутствует в уравнении и в первой и во второй степени.

Первый признак неканоничности устраняется при помощи преобразования

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}} \tag{4}$$

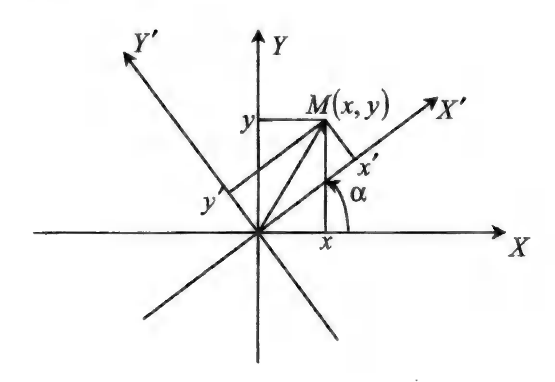
Геометрический смысл этой замены переменных заключается в переходе от системы координат OXY к системе $O'X'Y'$ путем поворота вокруг точки O на угол α, который выбирается из условия отсутствия в преобразованном уравнении слагаемых, содержащих произведение $x'y'$.

Второй признак неканоничности устраняется преобразованием

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= x' - x'_0, \\ y'' &= y' - y'_0. \end{aligned}} \tag{5}$$

Преобразование (5) осуществляет переход к системе координат $O''X''Y''$ параллельным переносом системы координат $O'X'Y'$, при котором центр новой системы координат занимает положение $O''(x'_0, y'_0)$. Для поиска координат x'_0, y'_0 проводится процедура выделения полного квадрата по соответствующей переменной (см. примеры).

Покажем, что формулы (4) определяют преобразование поворота. Рассмотрим рисунок.



Точке $M(x, y)$ соответствует радиус-вектор

$$\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j}\,, \tag{6}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – базисные орты системы координат OXY. С другой стороны,

$$\vec{r}_M = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'\,, \tag{7}$$

где $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ – базисные орты системы координат $O'X'Y'$.

Из рисунка видно, что

$$\vec{i}' = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha\,,$$

$$\vec{j}' = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha\,.$$

Подставим последние равенства в (7). После упрощений получим

$$\vec{r}_M = (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\vec{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\vec{j}\,. \tag{8}$$

Сравнивая (6) и (8), получаем

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}}$$

и убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения о характере преобразования по формулам (4).

С использованием обозначений

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ \mathrm{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

формулы (4) можно записать в компактной матричной форме

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{T}\mathrm{X}'.} \tag{9}$$

Здесь T – матрица преобразования поворота на угол α вокруг начала координат. Первый столбец матрицы T – координаты вектора $\vec{i}'$. Этот вектор – образ вектора $\vec{i}$, т.е. результат поворота вектора $\vec{i}$ на угол α. Второй столбец – координаты вектора $\vec{j}'$, который является образом вектора $\vec{j}$.

Обратное преобразование (поворот на угол $-\alpha$) задается обратной матрицей

$$\mathrm{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Обращение связи старых и новых координат дается матричной формулой

$$\boxed{\mathrm{X}' = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{X},} \tag{10}$$

или в поэлементной записи

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (11)$$

Пример 1

Определить тип кривой, заданной уравнением $xy = 1$, сделать чертеж.

Решение

Для ответа на поставленный вопрос требуется, прежде всего, привести заданное уравнение к каноническому виду. Затем по каноническому уравнению определить тип кривой и сделать чертеж.

Используем преобразование поворота. После подстановки в заданное уравнение формул (4) получаем

$$x'^2\cos\alpha\sin\alpha - y'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = 1 .$$

Угол α найдем из условия

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos 2\alpha = 0 .$$

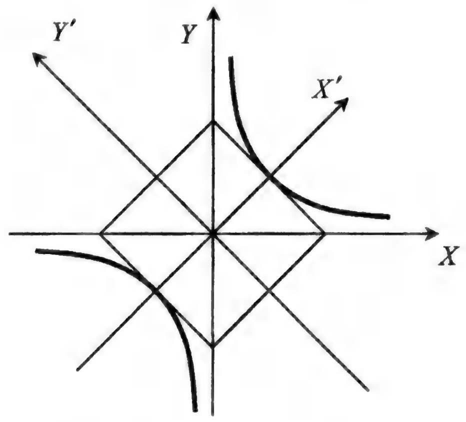
Одно из решений этого уравнения

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

При таком значении α исходное уравнение становится каноническим

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1 .$$

Это уравнение задает гиперболу, пересекающую ось $O'X'$. Чертеж представлен ниже.



Пример 2

Определить тип кривой, заданной уравнением $x^2+x+y=1$, сделать чертеж.

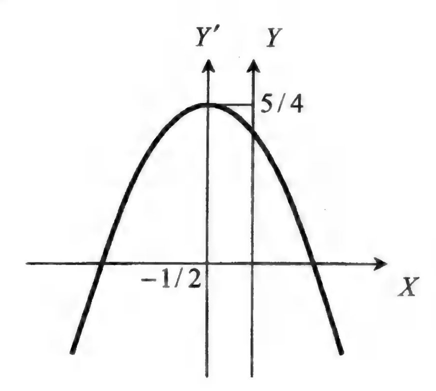
Решение

Неканоничность заданного уравнения связана с тем, что переменная x присутствует в уравнении и во второй, и в первой степени. Выделим полный квадрат по этой переменной

$$x^2+x+y=\left(x^2+2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y-\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Уравнение принимает вид $\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\left(y-\frac{5}{4}\right).}$

Получено каноническое уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $O'\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$.



Лекция 9. Поверхности второго порядка

Содержание

1. Основные понятия.
2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

3. Решение типичных задач.

9.1. Основные понятия

Определение

Уравнением данной ***поверхности*** называется такое уравнение с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, принадлежащей этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не принадлежащей этой поверхности.

Поверхность, определенная данным уравнением, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Определение

Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность Q, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \qquad (2)$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка равны одновременно нулю (в противном случае Q – алгебраическая поверхность первого порядка, т.е. плоскость).

В зависимости от значений коэффициентов возможны случаи, когда уравнение (2) определяет *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей).

Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не имеет решений и задает *пустое множество*; уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает *точку* с координатами $(0,0,0)$; уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ задает *плоскость* $x = 1$; уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает *пару плоскостей* $x = y$ и $x = -y$.

Далее будем рассматривать только невырожденные поверхности.

Теорема

Всякое уравнение (2), задающее невырожденную поверхность путем преобразования координат, можно привести к ***каноническому виду***, при котором каждая переменная содержится в уравнении только в одной степе-

ни, либо только в первой, либо только во второй, а смешанные произведения отсутствуют.

9.2. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям

Основным методом исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений*, когда о форме поверхности судят по форме кривых, которые получаются при пересечении данной поверхности плоскостями

$$x = \text{const}\,,\ y = \text{const}\,,\ z = \text{const}\,.$$

Последовательно рассмотрим канонические уравнения поверхностей второго порядка.

1. Эллипсоид

Определение

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z=0$. Линия пересечения эллипсоида и плоскости задается системой уравнений

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

или

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$$

Очевидно, что Γ – эллипс с полуосями a и b.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $z=h$. Линия пересечения задается системой уравнений

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h\end{cases}$$

или

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

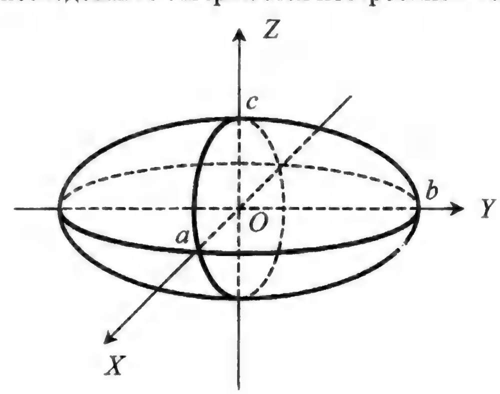
где $a_1=a\cdot\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\cdot\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$.

Таким образом, если $0<h<c$, то Γ – эллипс с полуосями $a_1<a$, $b_1<b$. Если $h=c$, Γ – точка с координатами $(0,0,c)$. Если $h>c$, система решений не имеет, т.е. исследуемая поверхность не имеет общих точек с рассматриваемой плоскостью.

Далее, так как переменная z содержится в уравнении во второй степени, плоскость $z=0$ является *плоскостью симметрии* эллипсоида. Отсюда следует, что достаточно исследовать форму поверхности и построить ее часть в области $z\geq 0$, достроив затем остальную часть путем зеркального отражения найденного фрагмента поверхности относительно координатной плоскости OXY.

Аналогично рассматриваются сечения поверхности Q плоскостями $x=\text{const}$, $y=\text{const}$.

Выполненное исследование завершается построением чертежа.



Вывод

Эллипсоид – замкнутая ограниченная поверхность, имеющая три плоскости симметрии $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Замечание

Если $a=b$, каноническое уравнение эллипсоида принимает вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. При этом линиями пересечения эллипсоида с плоскостями $z=h$, где $-c<h<c$, являются окружности, центры которых лежат на оси OZ, и, следовательно, в этом случае эллипсоид является фигурой вращения с осью OZ.

Если $a=b=c=R$, каноническое уравнение принимает вид $x^2+y^2+z^2=R^2$ и задает сферу с центром в начале координат и радиусом R.

2. Гиперболоиды

Однополостный гиперболоид

Определение

Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.}$$

Линия пересечения гиперболоида и плоскости $z=0$ задается системой уравнений

$$\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0,\end{cases}$$

определяющей эллипс с полуосями a и b.

В сечении плоскостью $z=h$ имеем кривую

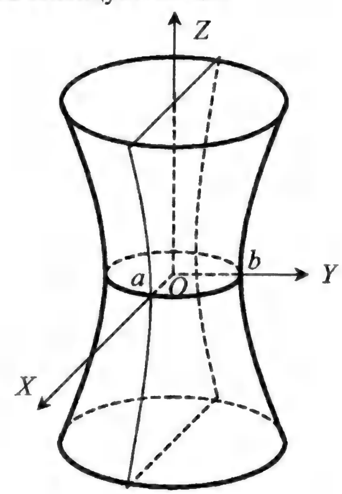
$$\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

являющуюся также эллипсом, но с большими, чем в предыдущем случае полуосями $a_1 = a \cdot \sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1 = b \cdot \sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$.

Рассмотрим сечение поверхности Q плоскостью $x = 0$. Уравнения линии пересечения

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

задают гиперболу, пересекающую ось OY. Сечение Q плоскостью $y = 0$ задает гиперболу, пересекающую ось OX.



Вывод

Однополостный гиперболоид – поверхность, имеющая вид расширяющейся трубки с тремя плоскостями симметрии $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Замечание

Если $a = b$, каноническое уравнение однополостного гиперболоида принимает вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Соответствующая поверхность является однополостным гиперболоидом вращения с осью OZ.

Двуполостный гиперболоид

Определение

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.}$$

Линия пересечения гиперболоида и плоскости $z=0$ задается системой уравнений

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,\\ z=0,\end{cases}$$

определяющей пустое множество.

В сечении плоскостью $z=h$ имеем кривую

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z=h,\end{cases}$$

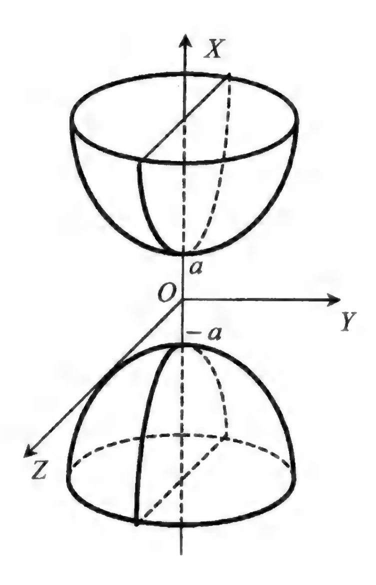
где $a_1=a\cdot\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, $b_1=b\cdot\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$.

Если $h>c$, Γ – эллипс с полуосями a_1, b_1. Если $h=c$, Γ – точка $(0,0,c)$. Для $-c<h<c$ сечение – пустое множество.

Сечение Q плоскостью $x=0$

$$\Gamma:\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0\end{cases}$$

задают гиперболу, пересекающую ось OZ. Сечение Q плоскостью $y=0$ также задает гиперболу, пересекающую ось OZ.



Вывод

Двуполостный гиперболоид – поверхность, имеющая вид двух бесконечно расширяющихся чаш с тремя плоскостями симметрии $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Замечание

Если $a = b$, каноническое уравнение двуполостного гиперболоида принимает вид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Соответствующая поверхность является двуполостным гиперболоидом вращения с осью OZ.

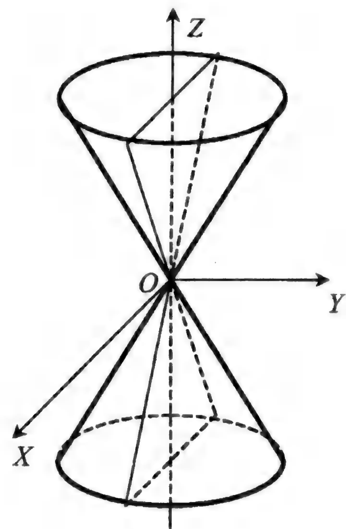
3. Конус

Определение

Конусом второго порядка называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.}$$

Метод сечений позволяет составить представление о форме этой поверхности.



Можно отметить, что конус является вырожденным гиперболоидом точно так же, как пара пересекающихся прямых, заданных уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, считается вырожденной гиперболой в сравнении с гиперболой, определяемой каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Осью конуса, заданного рассматриваемым каноническим уравнением, является ось OZ. Поперечные сечения являются эллипсами. Если $a=b$, конус становится фигурой вращения.

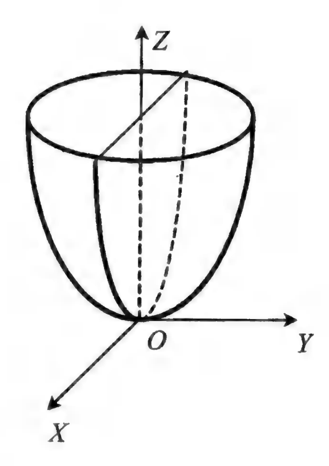
4. Параболоиды

Эллиптический параболоид

Определение

Эллиптическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=pz},\ p>0.$$



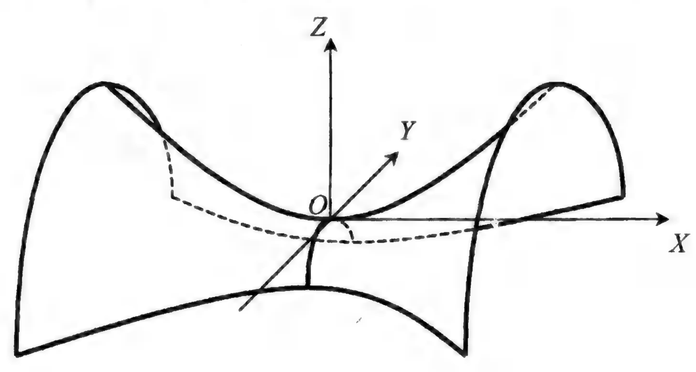
Гиперболический параболоид

Определение

Гиперболическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=pz},\ p>0.$$

Применение метода сечений приводит к тому, что в плоскостях $z=h$, где $h>0$ ($h<0$), обнаруживаются гиперболы, а в плоскостях $x=h$ и $y=h>0$ – параболы. Отсюда и название исследуемой поверхности.



5. Цилиндры второго порядка

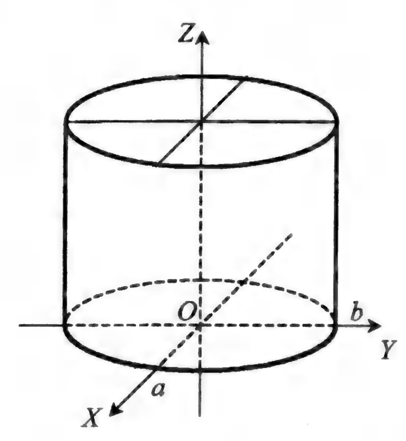
Эллиптический цилиндр

Определение

Эллиптическим цилиндром называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

Осью цилиндра является координатная ось OZ, поперечные сечения – эллипсы.

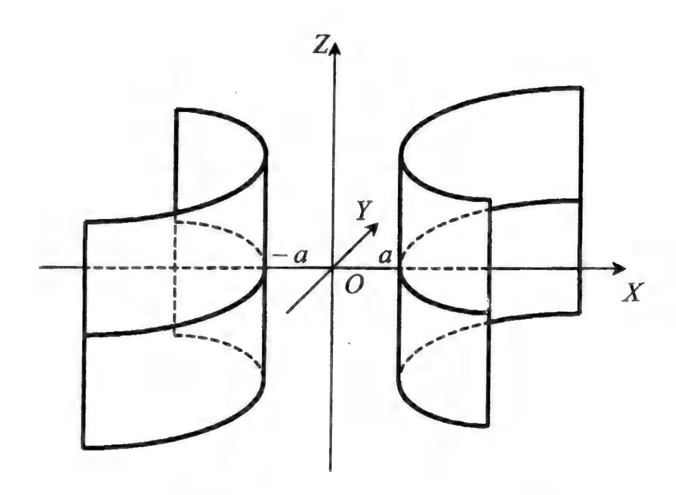


Гиперболический цилиндр

Определение

Гиперболическим цилиндром называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.}$$

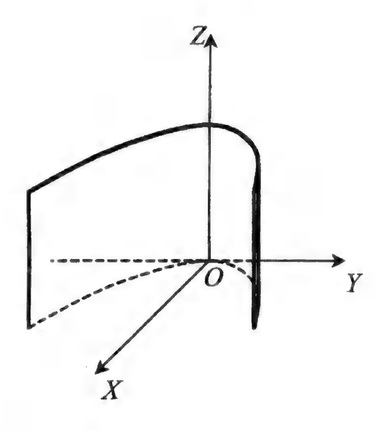


Параболический цилиндр

Определение

Параболическим цилиндром называется поверхность с каноническим уравнением

$$\boxed{y^2 = 2px}, \ p > 0.$$



Заметим, что признаком рассмотренных цилиндрических поверхностей является отсутствие одной из переменных в каноническом уравнении.

9.3. Решение типичных задач

Задача 1

Установить тип заданной поверхности.

$$x^2 - y^2 + z^2 + 4 = 0$$

Решение

Перенесем константу в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на число 4. Получим

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - y^2 = -1.$$

Это уравнение задает двуполостный гиперболоид вращения с осью OY.

Задача 2

Установить тип заданной поверхности.

$$x^2 + y^2 + z = 2$$

Решение

Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 + y^2 = -(z - 2),$$

являющемуся канонической формой уравнения параболоида вращения с осью OZ, вершина которого находится в точке $(0,0,2)$, а выпуклость обращена вверх.

Задача 3

Составить уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида

$$x = y^2 + z^2$$

плоскостью

$$x + 2y - z = 0.$$

Решение

Сечение параболоида плоскостью задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x + 2y - z = 0. \end{cases}$$

Этой системе соответствует некоторая линия в пространстве. Чтобы найти проекцию этой линии на координатную плоскость OXY, следует исключить из этой системы переменную z. В результате получаем $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$. Аналогично находятся остальные проекции.

Ответ:

На плоскость OXY: $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$, на плоскость OXZ: $x^2 - 2xz + 5z^2 - 4x = 0$, на плоскость OYZ: $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$.

Задача 4

Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой

$$\begin{cases} z = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$$

вокруг оси OX.

Решение

Сечение искомой поверхности плоскостью $x = x_0$, перпендикулярной оси вращения, есть окружность с центром в точке $C(x_0,0,0)$ радиуса $R = z(x_0)$. Уравнение этой окружности $y^2 + z^2 = x_0^4$. Для произвольного x_0 получаем уравнение поверхности вращения $y^2 + z^2 = x^4$.

Ответ:

$y^2 + z^2 = x^4$.

Введем дополнительное *определение.*

Цилиндрическая поверхность является результатом перемещения прямой (***образующей***) по некоторой линии (***направляющей***) параллельно самой себе.

Задача 5

Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{l} = \{2,-3,4\}$, а направляющая дана уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$$

Решение

Множество точек искомой поверхности образовано точками, лежащими на прямых, проходящих через некоторую точку направляющей параллельно вектору $\vec{l}$. Составим канонические уравнения этих прямых: $\frac{x-X}{2}=\frac{y-Y}{-3}=\frac{z-1}{4}$. Здесь $M(x,y,z)$ – произвольная точка прямой, а $N(X,Y,1)$ – фиксированная точка направляющей, через которую проходит прямая, называемая образующей. Отсюда $X=\frac{1}{2}(1+2x-z)$, $Y=\frac{1}{4}(-3+4y+3z)$. Подставим эти выражения в уравнение $X^2+Y^2=9$, которому удовлетворяют координаты точек направляющей, и получим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

Ответ:

$16x^2+16y^2+13z^2-16xz+24yz+16x-24y-26z=131$.

Дополнительное *определение.*

Коническая поверхность является результатом движения прямой (***образующей***), проходящей через фиксированную ***вершину*** и переменную точку ***направляющей***.

Задача 6

Составить уравнение конуса с вершиной в точке $S(0,0,5)$ и направляющей

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$$

Решение

Множество точек искомой поверхности образовано точками, лежащими на прямых, проходящих через некоторую точку направляющей, и точку S. Составим канонические уравнения этих прямых: $\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z-5}{-5}$.

Здесь $M(x,y,z)$ – произвольная точка прямой, а $N(X,Y,0)$ – фиксированная точка направляющей, через которую проходит прямая, называе-

мая образующей. Отсюда $X=-\frac{5x}{z-5}$, $Y=-\frac{5y}{z-5}$. Подставим эти выражения в уравнение $\frac{X^2}{4}+Y^2=1$, которому удовлетворяют координаты точек направляющей, и получим искомое уравнение конической поверхности.

Ответ:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{(z-5)^2}{25}.$$

IV. Элементы линейной алгебры

Лекция 10. Линейные пространства

Содержание

1. Линейные пространства.
2. Примеры линейных пространств.
3. Примеры нелинейных пространств.
4. Линейная зависимость элементов линейного пространства.

10.1. Линейные пространства

Определение 1

Множество R элементов любой природы $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ называется линейным пространством, если:

I. Имеется правило, по которому любым двум элементам $\bar{x}, \bar{y} \in R$ ставится в соответствие $\bar{z} \in R$, называемое суммой $\bar{x}$ и $\bar{y}$,

$$\boxed{\bar{z} = \bar{x} + \bar{y};}$$

II. Имеется правило, по которому $\forall \bar{x} \in R$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие $\bar{u} \in R$, называемое произведением $\bar{x}$ на λ

$$\boxed{\bar{u} = \lambda \bar{x}} \text{ или } \boxed{\bar{u} = \bar{x}\lambda;}$$

III. Правила (I), (II) обладают восемью свойствами:

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;
2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;
3. $\exists \bar{0}: \forall \bar{x} \quad \bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$;
4. $\forall \bar{x} \quad \exists \bar{x}': \bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$, где $\bar{x}' = -\bar{x}$ – противоположный элемент;
5. $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y}$;
6. $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{x}$;
7. $\lambda(\mu \bar{x}) = \bar{x}(\lambda \mu)$;
8. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x} \quad \forall \bar{x}$.

10.2. Примеры линейных пространств

Пример 1

Множество всех геометрических векторов (см. Лекцию 3).

Его элементами являются геометрические векторы

$$\overline{x} = \vec{x}.$$

Выполняется ли правило I определения линейного пространства?

Рассмотрим, в частности, множество R^2 (геометрические векторы плоскости). Если $\vec{a} \in R^2$, $\vec{b} \in R^2$, то $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \in R^2$ (см. определение суммы векторов). Следовательно, правило I – выполняется

Выполнение правил II, III также является очевидным.

Вывод

R^1 – множество всех геометрических векторов на прямой;

R^2 – множество всех геометрических векторов на плоскости;

R^3 – множество всех геометрических векторов в пространстве – являются линейными пространствами.

Пример 2

Координатное пространство R^n *(пространство строк).*

Элемент $\overline{x} \in R^n$, $\overline{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$, $x_i \in \mathbb{R}$.

Числа x_1, x_2, …, x_n – координаты элемента $\overline{x}$, $\overline{x}$ – строка.

$\overline{x} = \left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$, $\overline{y} = \left(y_1, y_2, \dots, y_n\right)$.

Введем правило I следующим образом:

$\overline{x} + \overline{y} = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\right)$.

Следовательно, $\overline{x} + \overline{y} \in R^n$.

Правило II выполняется:

$\lambda\overline{x} = \left(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\right)$, $\lambda\overline{x} \in R^n$.

Правило III выполняется, в частности:

$\exists\overline{0}$, $\overline{0} = (0,0,\dots,0)$,

$\overline{0} + \overline{x} = \overline{x}$ $\forall\overline{x}$.

$\exists\overline{x}'$, $\overline{x}' = -\overline{x} = \left(-x_1, -x_2, \dots, -x_n\right)$,

$\forall\overline{x}$ $\overline{x} + \overline{x}' = \overline{0}$.

Вывод

Пространство строк является линейным.

Пример 3

Множество P_n *многочленов, степень которых не превосходит натурального* n.

Пусть для определенности $n = 3$.

$\bar{x} = 1 + t^2 + t^3$, $\bar{y} = 2t$.

$\bar{x} \in \mathrm{P}_n$, $\bar{y} \in \mathrm{P}_n$.

Правила I, II – обычные алгебраические правила.

Правило I:

$\bar{x} + \bar{y} = 1 + t^2 + t^3 + 2t$, $\bar{x} + \bar{y} \in \mathrm{P}_n$.

Правило II:

$\lambda\bar{x} = \lambda + \lambda t^2 + \lambda t^3$, $\lambda\bar{x} \in \mathrm{P}_n$.

Правило III – выполняется.

Вывод

Таким образом, P_n – линейное пространство.

Пример 4

Множество $C_{[a,b]}$ *всех функций* $f(t)$, *непрерывных на* $[a,b]$.

Правила I и II введены по закону математического анализа.

Выполнение правила III очевидно.

Пример 5

Множество $\mathrm{A}_{m,n}$ *всех матриц размера* $(m \times n)$.

Элементы – матрицы размера $(m \times n)$, то есть $\bar{x} = A$.

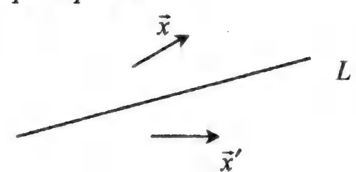
Правила I и II введены в Лекции 2: правило суммирования матриц одного размера и правило умножения матрицы на число. Для этих правил выполняются 8 свойств, в том числе

$$\exists\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ (в матрице m строк, n столбцов):

$\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$,
$\exists\overline{x}'=-\overline{x}$.

10.3. Примеры нелинейных пространств

Пример 1
Множество R' всех геометрических векторов за исключением векторов, коллинеарных некоторой прямой.



$\overline{x}\in R'$, $\overline{x}'\in R'$.
$\vec{x}$, $\vec{x}'$ – векторы, симметричные относительно L.
$\left.\begin{array}{l}(\overline{x}+\overline{x}')\|L\\(\overline{x}+\overline{x}')\notin R'\end{array}\right\}\Rightarrow$ R' – не является линейным пространством, так как не выполняется правило I.

Пример 2
Множество P_n' всех многочленов, степень которых точно равняется n.
Так, для $n=3$:
$\overline{x}=t^2+t^3$, $\overline{x}\in P_n'$; $\overline{y}=2+5t-t^3$, $\overline{y}\in\mathrm{P}_n'$.
$\overline{x}+\overline{y}=3+5t+2t^2\notin\mathrm{P}_n'$.
Следовательно, P_n' не является линейным пространством, так как не выполняется правило I.

Пример 3
Множество P_n'' многочленов степени меньшей или равной n с положительными коэффициентами.
Вновь для $n=3$:
$\overline{x}=1+t^2+t^3$, $\overline{x}\in\mathrm{P}_n''$.
$-5\overline{x}=-5-5t^2-5t^3$, $-5\overline{x}\notin\mathrm{P}_n''$.

Следовательно, не выполняется правило II и P_n^{*} не является линейным пространством.

10.4. Линейная зависимость элементов линейного пространства (см. Лекцию 3, вопрос 2)

Рассмотрим линейное пространство R.

Определение 2

Линейной комбинацией элементов $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ называется выражение вида

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + ... + \gamma\bar{z},$$

где α, β, ..., γ – произвольные вещественные числа.

Определение 3

Элементы $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ называются ***линейно независимыми***, если равенство

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + ... + \gamma\bar{z} = \bar{0}$$

выполняется ***лишь в случае***, когда все коэффициенты α, β, ..., γ равны нулю.

Определение 4

Элементы называются ***линейными зависимыми***, если равенство

$$\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + ... + \gamma\bar{z} = \bar{0}$$

возможно, когда среди коэффициентов α, β, ..., γ имеется ***хотя бы один***, отличный от нуля.

Свойства линейной зависимости

1°. Если среди элементов $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ есть ***нулевой*** – система элементов ***линейно зависима***.

2°. Если часть элементов $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ ***линейно зависима***, то и ***все*** элементы линейно зависимы.

3°. Элементы $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., $\bar{z}$ ***линейно зависимы*** тогда и только тогда, когда один из них является ***линейной комбинацией*** остальных.

Пример

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Ее строки – $\bar{e}_1=(3,2,1,2)$, $\bar{e}_2=(2,0,-1,1)$, $\bar{e}_3=(0,4,5,1)$ – элементы координатного пространства R^4 (пространства строк). Являются ли $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ линейно зависимыми?

Нетрудно убедиться, что $\bar{e}_3=2\bar{e}_1-3\bar{e}_2$. Далее, так как $\bar{e}_3$ является линейной комбинацией $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, то по свойству (3) строки $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ линейно зависимы.

Лекция 11. Размерность и базис линейного пространства

Содержание

1. Ранг матрицы. Базисный минор.
2. Элементарные преобразования матрицы.
3. Размерность и базис линейного пространства.
4. Примеры базисов конкретных линейных пространств.
5. Переход от одного базиса к другому.
6. Связь координат элемента линейного пространства в старом и новом базисе.

11.1. Ранг матрицы. Базисный минор

Определение

Рассмотрим матрицу A размера $(m\times n)$ – совокупность m строк, каждая из которых содержит n чисел. Зафиксируем в ней произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на их пересечении, образуют ***квадратную матрицу*** порядка k. Определитель такой матрицы называется ***минором k-го порядка матрицы*** A и обозначается символом M_k.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3\,2\;1\;2 \\ 2\,0-1\,1 \\ 0\,4\;5\;1 \end{pmatrix}$$

$M_1 = -1$, $M_1 = 5$, $M_1 = 0$ и так далее.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},\ M_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix},\ M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определение

Ранг матрицы – наивысший порядок миноров, отличных от нуля.

Обозначение $r(A)$.

В предыдущем примере все $M_3 = 0$.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Определение

Минор порядка $r(A)$, отличный от нуля, называется ***базисным минором***.

В примере: $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ – базисный минор.

Определение

Строки и столбцы матрицы, на пересечении которых расположен базисный минор, называются ***базисными***.

В примере: $\overline{e}_1 = (3,2,1,2)$, $\overline{e}_2 = (2,0,-1,1)$ – базисные строки.

Теорема 1 (о базисном миноре)

Базисные строки линейно независимы.

Доказательство

Рассмотрим матрицу A размера $(m\times n)$. Пусть $r(\mathrm{A})=r$, D – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу матрицы A.

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_1} & a_{r_2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

$\mathrm{D}\neq 0$, так как D – базисный минор (определение базисного минора).

Нужно доказать, что базисные строки линейно независимы.

Предположим противное. Пусть базисные строки линейно зависимы. Тогда

$$\overline{e}_r=\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+\ldots+\alpha_{r-1}\overline{e}_{r-1}, \text{ где } \overline{e}_i=\left(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{ir}\right).$$

Преобразуем D.

Из последней строки вычтем первую, умноженную на α_1, затем вторую, умноженную на α_2, и так далее; предпоследнюю, умноженную на α_{r-1}. Определитель D примет вид:

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r-11} & a_{r-12} & \dots & a_{r-1r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

По свойствам определителей, с одной стороны $\mathrm{D}=0$ (есть нулевая строка), но с другой стороны, определитель не изменил своего значения, то есть $\mathrm{D}\neq 0$. Получили противоречие. Значит действительно, базисные строки матрицы являются линейно независимыми, что и требовалось доказать.

Теорема 2

Небазисные строки являются линейной комбинацией базисных.

Доказательство

Пусть $r(A) = r$, D – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу A. Составим определитель Δ (путем окаймления D любыми строкой и столбцом A, не входящими в D) и разложим его по элементам последнего столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix} = a_{1l} \cdot A_1 + a_{2l} \cdot A_2 + \dots + a_{rl} \cdot A_r + a_{kl} \cdot A_{r+1} = 0$$

(так как Δ – минор порядка $r+1$, а ранг матрицы равен r, значит все миноры порядка, большего чем r, равны 0). В разложении символом A_i обозначено алгебраическое дополнение элемента e_{il}.

$$A_{r+1} = D \neq 0$$

Последнее равенство поделим на A_{r+1}, после чего получим, что $a_{kl} = \frac{-A_1}{D} a_{1l} + \frac{-A_2}{D} a_{2l} + \dots + \frac{-A_r}{D} a_{rl}$.

$$\boxed{a_{kl} = \alpha_1 a_{1l} + \alpha_2 a_{2l} + \dots + \alpha_r a_{rl}}$$

Следовательно,

$$\boxed{\bar{e}_k = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_r \bar{e}_r,}$$

где $\bar{e}_k$ – строка матрицы A с номером $k > r$; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_r$ – базисные строки.

Следствие 1

Ранг матрицы равен ***максимальному числу*** линейно независимых строк.

Следствие 2

Необходимым и достаточным условием равенства нулю определителя является ***линейная зависимость*** его строк.

Находить ранг матрицы по определению трудно. Проще пользоваться ***методом элементарных преобразований***.

11.2. Элементарные преобразования матрицы

Под элементарными понимают следующие преобразования матриц.

1. Умножение строки на любое вещественное число, не равное нулю.
2. Сложение двух строк.
3. Перестановка местами двух строк.
4. Те же преобразования над столбцами.

Теорема

Элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранга.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к квазитреугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \ldots & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{rr} & * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь все $\tilde{a}_{ii} \neq 0$, а * – элементы, вид которых не важен.

Очевидно, что ранг такой матрицы равен числу ненулевых элементов, стоящих на главной диагонали, то есть r.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2$.

11.3. Размерность и базис линейного пространства

Определение

Размерностью линейного пространства называется максимальное число линейно независимых элементов, содержащихся в нем.

Различают пространства

а) ***конечномерные***:

1) R^1 ($n=1$),
   R^2 ($n=2$),
   R^3 ($n=3$);

2) P_n : $\{1, t, t^2, ..., t^n\}$ – линейно независимые элементы, размерность – $n+1$.

б) ***бесконечномерные***:

$C_{[a,b]}$.

$\bar{x} = f(t)$ – непрерывна на $[a,b]$.

Определение

Базисом n-мерного линейного пространства называется упорядоченная совокупность n линейно независимых элементов этого пространства.

Теорема

Любой элемент $\bar{x}$ линейного пространства L_n может быть разложен по базису единственным способом.

Доказательство

Пусть L_n – линейное пространство размерности n.

$\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ – базис, $\bar{x} \in L_n$.

1. *Возможность разложения.*

Рассмотрим систему $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$, $\bar{x}$ ($n+1$ элементов), которая является линейно зависимой. Возможна нулевая линейная комбинация этих элементов

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + ... + \alpha_n\bar{e}_n + \alpha\bar{x} = \bar{0},$$

при наличии ненулевых среди коэффициентов (в том числе $\alpha \neq 0$, так как в противоположном случае $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, …, $\overline{e}_n$ были бы линейно зависимыми).

После очевидных преобразований получаем

$$\overline{x} = \frac{-\alpha_1}{\alpha}\overline{e}_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha}\overline{e}_2 + \ldots + \frac{-\alpha_n}{\alpha}\overline{e}_n$$

или

$$\boxed{\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n.}$$

2. *Единственность (от противного).*

Пусть возможно и другое (с другими коэффициентами) разложение

$$\overline{x} = x_1'\overline{e}_1 + x_2'\overline{e}_2 + \ldots + x_n'\overline{e}_n.$$

Почленное вычитание этих разложений приводит к равенству

$$(x_1 - x_1')\overline{e}_1 + (x_2 - x_2')\overline{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\overline{e}_n = \overline{0},$$

которое возможно лишь при условии $x_1 = x_2'$, $x_2 = x_2'$, …, $x_n = x_n'$, так как $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ – базис (состоит из линейно независимых элементов).

Определение

Коэффициенты разложения элемента по базису называются ***координатами элемента*** в данном базисе.

11.4. Примеры базисов конкретных линейных пространств

Пример 1

R^1, $n = 1$, $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1\}$, $\overline{e}_1 = \vec{i}_1$.

R^2, $n = 2$, $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $\overline{e}_1 = \vec{i}$, $\overline{e}_2 = \vec{j}$.

R^3, $n = 3$, $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, $\overline{e}_1 = \vec{i}$, $\overline{e}_2 = \vec{j}$, $\overline{e}_3 = \vec{k}$.

Пример 2

P_m, $n = m + 1$, $\mathcal{B} = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_{m+1}\}$,

$\overline{e}_1 = 1$, $\overline{e}_2 = t$, $\overline{e}_3 = t^2$, …, $\overline{e}_n = t^m$.

11.5. Переход от одного базиса к другому

Очевидно, что в n-мерном линейном пространстве L_n можно составить много базисов.

Рассмотрим один базис

$$\mathcal{B}=\{\overline{e},\overline{e}_2,...,\overline{e}_n\} \text{ – старый базис.}$$

Рассмотрим другой базис

$$\mathcal{B}'=\{\overline{e}_1',\overline{e}_2',...,\overline{e}_3'\} \text{ – новый базис.}$$

По теореме разложения любой элемент нового базиса можно разложить по старому базису

$$\overline{e}_k' = t_{1k}\overline{e}_1 + t_{2k}\overline{e}_2 + ... + t_{nk}\overline{e}_n, \; k = 1,2,...,n\,.$$

Этому элементу взаимно однозначно соответствует матрица-столбец

$$\overline{e}_k' \Leftrightarrow \mathrm{E}_k' = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ ... \\ t_{nk} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$\mathrm{T}_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{pmatrix} -$$

– ***матрица перехода от базиса*** $\mathcal{B}$ ***к базису*** $\mathcal{B}'$ (от старого к новому). Матрица перехода записывается по столбцам. Каждый столбец этой матрицы является столбцом координат образа соответствующего базисного элемента, то есть первый столбец – столбец координат элемента $\overline{e}_1'$, второй – столбец координат $\overline{e}_2'$, n-й столбец – столбец координат $\overline{e}_n'$ в старом базисе.

Так как элементы $\overline{e}_1'$, $\overline{e}_2'$, …, $\overline{e}_n'$ – линейно независимые (это базис), значит столбцы матрицы $\mathrm{T}_{\beta\to\beta'}$ линейно независимы. Отсюда

$$\boxed{\det \mathrm{T}_{\beta\to\beta'} \neq 0}$$

(Лекция 11 (п. 1) следствие 2 из теоремы о базисном миноре).

11.6. Связь координат элемента линейного пространства в старом и новом базисе

Рассмотрим $L_n : \mathcal{B}=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\}$, $\bar{x}\in L_n$, $\bar{y}\in L_n$.

$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$,

$\bar{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$,

$\bar{y} = (y_1, y_2,..., y_n)$.

Замечание 1

Элементы, заданные в одном и том же базисе, можно сравнивать.

$\bar{x} = \bar{y}$, если

$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_n = y_n$.

Замечание 2

Элементы, заданные в одном и том же базисе, можно складывать

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2,..., x_n + y_n).$$

Замечание 3

$\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2,..., \lambda x_n)$

Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ заданы в разных базисах, то прежде, чем выполнять действия, нужно задать их в одном базисе.

Пусть $\mathcal{B}'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',...,\bar{e}_n'\}$ – новый базис.

$\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + ... + x_n'\bar{e}'_n$.

$(x_1', x_2',..., x_n')$ – ?

$\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + ... + x_n'\bar{e}'_n = x_1'(t_{11}\bar{e}_1 + t_{21}\bar{e}_2 + ... + t_{n1}\bar{e}_n) +$

$+ x_2'(t_{12}\bar{e}_1 + t_{22}\bar{e}_2 + ... + t_{n2}\bar{e}_n) + ... + x_n'(t_{1n}\bar{e}_1 + t_{2n}\bar{e}_2 + ... + t_{nn}\bar{e}_n) =$

$= (t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + ... + t_{1n}x_n')\bar{e}_1 + (t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + ... + t_{2n}x_n')\bar{e}_2 + ... +$

$+ (t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + ... + t_{nn}x_n')\bar{e}_n = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$.

По теореме единственности разложения

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \ldots + t_{1n}x'_n \,, \\ x_2 = t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \ldots + t_{2n}x'_n \,, \\ \ldots \\ x_n = t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \ldots + t_{nn}x'_n \end{cases}} -$$

– формулы, связывающие старые и новые координаты элемента $\overline{x}$.
Обозначим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – столбец старых координат,

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$$ – столбец новых координат.

С учетом этих обозначений возможна матричная форма записи формул перехода

$$\boxed{X = T_{\beta\to\beta'}X'\,,}$$

$$\boxed{X' = T^{-1}_{\beta\to\beta'}X\,.}$$

Последнее имеет смысл, так как $\exists T^{-1}_{\beta\to\beta'}$ ($\det T_{\beta\to\beta'} \neq 0$).

Лекция 12. Евклидовы пространства

Содержание

1. Евклидовы пространства.
2. Примеры конкретных евклидовых пространств.
3. Простейшие свойства евклидова пространства.
4. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства.
5. Примеры ортонормированных базисов.
6. Метод ортогонализации линейно независимых элементов евклидова пространства.

12.1. Евклидовы пространства

Определение

Линейное пространство R называется ***евклидовым***, если выполнены два требования:

I. Имеется правило, по которому $\forall \overline{x}, \overline{y} \in R$ ставится в соответствие вещественное число, называемое скалярным произведением элемента $\overline{x}$ на элемент $\overline{y}$

$$(\overline{x}, \overline{y});$$

II. Правило (I) обладает следующими четырьмя свойствами:

1. $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$;
2. $(\overline{x}_1 + \overline{x}_2, \overline{y}) = (\overline{x}_1 \overline{y}) + (\overline{x}_2, \overline{y})$;
3. $(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y}) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(\overline{x}, \overline{x}) = \begin{cases} 0, \overline{x} = \overline{0}, \\ \text{const} > 0, \overline{x} \neq \overline{0}. \end{cases}$

12.2. Примеры конкретных евклидовых пространств

Пример 1

R^1, R^2, R^3.

$\overline{x} = \vec{x}$, $\overline{y} = \vec{y}$.

Правило (I):

$(\overline{x}, \overline{y}) = (\vec{x}, \vec{y})$ – см. Лекцию 4.

Правило (II):

Четыре свойства для $(\vec{x}, \vec{y})$ выполняются (Лекция 4).

Значит, R^1, R^2, R^3 – евклидовы пространства.

Пример 2

$C_{[a;b]}$.

$\overline{x} = f_1(t)$, $\overline{y} = f_2(t)$, $\overline{x}, \overline{y} \in C_{[a;b]}$.

Правило (I):

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \int_a^b f_1(t) f_2(t) dt.$$

Правило (II):
Все 4 свойства выполняются (свойства интегралов).
$C_{[a;b]}$ – евклидово пространство.

Пример 3
Рассмотрим линейное пространство R^n – пространство строк.
$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$,
$\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$.
Правило (I):
$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.
Правило (II):
4 свойства выполняются.
R^n – евклидово пространство.

Пример 4
R^n – пространство строк.
По сравнению с предыдущим примером введем другое правило (I):
$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} x_i y_k$, где C_{ik} – элементы матрицы $C = (C_{ik})$, $i, k = 1,2,...n$:

а) C – квадратная матрица порядка n.

б) $C_{ik} = C_{ki}$ (C – симметричная матрица).

в) C – такова, что $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} C_{ik} x_i x_k = \begin{cases} 0, \bar{x} = \bar{0}, \\ \text{const} > 0, \bar{x} \neq \bar{0} \end{cases}$ (положительно определенная квадратичная форма).

Правило (II):
(1): $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i,k}^{n} C_{ik} x_i y_k$.

$$(\bar{y}, \bar{x}) = \sum_{i,k}^{n} C_{ik} y_i x_k = \left| \begin{matrix} \text{переобозначим} \\ \text{индексы} \\ \text{суммирования} \end{matrix} \right| = \sum_{i,k}^{n} C_{ki}\, y_k x_i .$$

Так как $C_{ki} = C_{ik}$, то $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$.
(2), (3): очевидны.

(4): $(\bar{x},\bar{x})=\sum_{i,k}^{n} C_{ik} x_i x_k$ – положительно определена и равна $\begin{cases} 0, \bar{x}=\bar{0}, \\ \text{const}>0, \bar{x}\neq\bar{0}. \end{cases}$

Вывод

R^n со скалярным произведением $(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} C_{ik} x_i y_k$ является евклидовым пространством.

12.3. Простейшие свойства евклидова пространства

Свойство 1

Любые два элемента евклидова пространства $\bar{x}\in E$ и $\bar{y}\in E$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y})^2 \le (x,x)(y,y),}$$

называемому ***неравенством Коши-Буняковского***.

Доказательство

Зафиксируем любое вещественное $\lambda\neq 0$.

Рассмотрим $(\lambda\bar{x}-\bar{y},\lambda\bar{x}-\bar{y})=\lambda^2(\bar{x},\bar{x})-2\lambda(\bar{x},\bar{y})+(\bar{y},\bar{y})$ – квадратный трехчлен с коэффициентами: $(\bar{x},\bar{x})$, $2(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{y},\bar{y})$. Условием неотрицательности (свойство (4) скалярного произведения) квадратного трехчлена является неположительность его дискриминанта

$D=4(\bar{x},\bar{y})^2-4(\bar{x},\bar{x})(\bar{y},\bar{y})\le 0$.

Откуда следует неравенство Коши-Буняковского

$(\bar{x},\bar{y})^2 \le (x,x)(y,y)$,

что и требовалось доказать.

Норма элемента

Определение

Нормой (длиной) элемента $\bar{x}\in E$ называется число $\|\bar{x}\|=\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$.

Свойства нормы

1°. $\|\bar{x}\| = \begin{cases} 0, \bar{x} = \bar{0}, \\ const > 0, \bar{x} \neq \bar{0}. \end{cases}$

2°. $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ $\forall \bar{x} \in \mathrm{E}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Свойства (1) и (2) – следствия свойств скалярного произведения.

Свойство 2

Неравенство треугольника: для любых двух элементов евклидова пространства $\bar{x} \in \mathrm{E}$, $\bar{y} \in \mathrm{E}$ справедливо неравенство:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|.$$

Доказательство

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y})} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y})}.$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y})} \leq \sqrt{(\bar{x}, \bar{x}) + 2\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}\sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} + (\bar{y}, \bar{y})} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} + \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})}\right)^2} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} + \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})} = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|,$$

что и требовалось доказать.

Определение

Углом между двумя элементами евклидова пространства $\bar{x} \in \mathrm{E}$ и $\bar{y} \in \mathrm{E}$ называется такой угол φ ($\varphi \in [0, \pi]$), что

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}.$$

Определение

Элементы евклидова пространства $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются ***ортогональными***, если их скалярное произведение равно 0.

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (\cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2})$$

Определение

Элемент $\bar{x} \in \mathrm{E}$ называется ***нормированным***, если его норма (длина) равна 1.

12.4. Ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства

Рассмотрим евклидово пространство E_n размерности n.

Определение

Базис $\mathcal{B}_0=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ пространства E_n называется ***ортонормированным***, если скалярное произведение $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$

Базисные элементы ортонормированного базиса попарно ортогональны и длина каждого из них равна 1.

Теорема

Если $\mathcal{B}=\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_n\}$ – произвольный базис E_n, то элементы

$$\bar{e}_k = \frac{\bar{g}_k}{\sqrt{(\bar{g}_k, \bar{g}_k)}}, \text{ где } \bar{g}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{f}_k \bar{e}_i) \bar{e}_i, \; k = 1,2,3,...,n \qquad (*)$$

образуют ортонормированный базис $\mathcal{B}_0=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ пространства E_n.

Доказательство

Нужно доказать, что элемент $\bar{e}_k$, найденный по формуле (*), удовлетворяет следующему условию:

$$(\bar{e}_k, \bar{e}_i) = \begin{cases} 0, k \neq i, \\ 1, k = i. \end{cases}$$

1. Пусть $k = 1$.

$\bar{g}_1 = \bar{f}_1$, $\bar{g}_1 \neq 0$, так как в противном случае система $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, ..., \bar{f}_n)$ была бы линейно зависимой.

$\bar{g}_1 \neq 0 \Rightarrow$ существует ненулевой элемент

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{g}_1}{\sqrt{(\bar{g}_1, \bar{g}_1)}},$$

причем $(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 1$.

2. Пусть $k = 2$, тогда $\bar{g}_2 = \bar{f}_2 - (\bar{f}_2, \bar{e}_1)\bar{e}_1$.

$\bar{g}_2 \neq 0$ ($\bar{g}_2$ – линейная комбинация элементов $\bar{f}_2$ и $\bar{e}_1$, эти элементы линейно независимы. В этой комбинации один из коэффициентов не равен 0, поэтому $\bar{g}_2 \neq 0$) $\Rightarrow$ существует ненулевой элемент

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{g}_2}{\sqrt{(\bar{g}_2, \bar{g}_2)}}.$$

Этот элемент обладает следующими свойствами:

$$(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 1;$$

$$(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 0, \text{ так как } (\bar{g}_2, \bar{e}_1) = 0.$$

Дальнейшее рассуждение проводится аналогично (такой способ доказательства лежит в основе метода математической индукции: от частного к общему).

12.5. Примеры ортонормированных базисов

1. R^3, $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
2. R^n, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
   $\mathcal{B}_0 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$,

где
$$\bar{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0),$$
$$\bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\ldots$$
$$\bar{e}_n = (0,0,0,\ldots,1).$$

12.6. Метод ортогонализации линейно независимых элементов евклидова пространства

Рассмотрим евклидово пространство E_n. Пусть $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, …, $\bar{f}_m$ – линейно-независимые элементы этого пространства, причем $m \leq n$.

Теорема

Элементы

$$\boxed{\bar{e}_k = \bar{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{f}_k, \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i, \bar{e}_i)} \bar{e}_i}, \; k = 1,\dots,n, \qquad (**)$$

построенные по формуле (**) из линейно независимых элементов $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ..., $\bar{f}_n$, являются ортогональными.

Доказательство

Аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Последняя теорема дает метод ортогонализации любых линейно независимых элементов E_n.

Пример

R^4.

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = (1,0,-1,0), \\ \bar{f}_2 = (2,1,2,-1), \\ \bar{f}_3 = (0,-1,4,-3) \end{cases} \text{ – линейно независимы.}$$

Ортогонализовать эту систему элементов.

Решение

По формуле (**)

$$\boxed{\bar{e}_1 = \bar{f}_1 = (1,0,-1,0).}$$

$$\bar{e}_2 = \bar{f}_2 - \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \bar{e}_1 = (2,1,2,-1) - \frac{(1\cdot 2 + 0\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot(-1))}{(1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0)} (1,0,-1,0)$$

$$\boxed{\bar{e}_2 = (2,1,2,-1)}$$

$$\bar{e}_3 = \bar{f}_3 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{e}_2)}{(\bar{e}_2, \bar{e}_2)} \bar{e}_2 - \frac{(\bar{f}_3, \bar{e}_1)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} \bar{e}_1 = (0,-1,4,-3) - \frac{10(2,1,2,-1)}{10} - \frac{(-4)}{2} (1,0,-1,0)$$

$$\boxed{\bar{e}_3 = (0,-2,0,-2)}$$

Лекция 13. Линейные операторы

Содержание

1. Линейные операторы.
2. Матричная запись линейных операторов.

13.1. Линейные операторы

Рассмотрим L^n и L^m.

Определение

Оператором, переводящим пространство L^n в L^m, называется отображение вида

$$\hat{A}: L^n \to L^m,$$

ставящее в соответствие элементу $\bar{x} \in L^n$ элемент $\bar{y} \in L^m$.

Обозначения

$\hat{A}\bar{x} = \bar{y}$ или $\hat{A}(\bar{x}) = \bar{y}$, $\bar{y}$ – образ элемента $\bar{x}$.

Определение

Оператор $\hat{A}: L^n \to L^m$ называется ***линейным***, если выполнено два требования:

1) $\hat{A}(\bar{x}+\bar{y}) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y})$ $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L^n$;

2) $\hat{A}(\lambda\bar{x}) = \lambda\hat{A}(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in L^n$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Примеры линейных операторов

1. $\hat{A}_1$ – оператор растяжения.

$\hat{A}_1 : R^3 \to R^3$.

$\hat{A}_1\vec{x} = k\vec{x}$, любому вектору $\vec{x} \in R^3$ ставится в соответствие вектор $k\vec{x} \in R^3$.

Проверим линейность оператора $\hat{A}_1$.

Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$.

Вычислим $\hat{A}_1(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x}+\vec{y}) = k\vec{x}+k\vec{y} = \hat{A}_1\vec{x}+\hat{A}_1\vec{y}$,

$$\hat{A}_1(\lambda\vec{x}) = k(\lambda\vec{x}) = k\lambda\vec{x} = \lambda k\vec{x} = \lambda\hat{A}_1\vec{x}.$$

$\widehat{A}_1$ – ***линейный оператор.***

2. $\widehat{A}_2$ – оператор зеркального отражения векторов плоскости относительно некоторой оси.

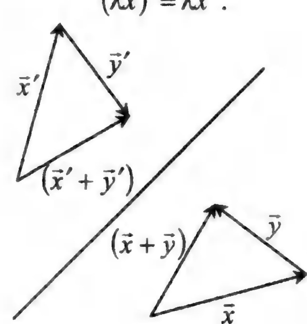
$\widehat{A}_2 : R^2 \to R^2$,

$\vec{x} \in R^2$, $\widehat{A}_2\vec{x} = \vec{x}'$, $\vec{x}' \in R^2$.

Линейность оператора $\widehat{A}_2$ смотри на чертеже:

$$(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}' + \vec{y}',$$

$$(\lambda\vec{x})' = \lambda\vec{x}'.$$



$\widehat{A}_2$ – ***линейный оператор.***

3. $\widehat{A}_3$ – оператор поворота векторов плоскости на угол φ $(0 < \varphi < 2\pi)$ вокруг начала координат.

$\vec{x} \in R^2$, $\widehat{A}_3\vec{x} = \vec{x}'$, $\vec{x}' \in R^2$.

$$\boxed{\widehat{A}_3 : R^2 \to R^2}$$

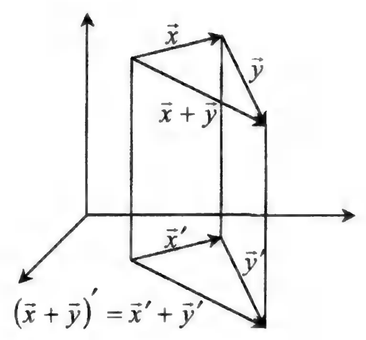
Убедиться в линейности $\widehat{A}_3$ можно, рассматривая чертеж.

4. $\widehat{A}_4$ – оператор ортогонального проектирования векторов обычного трехмерного пространства на координатную плоскость.

$\vec{x} \in R^3$; $A_4\vec{x} = \vec{x}'$, $\vec{x}' \in R^2$.

$$\boxed{\widehat{A}_4 : R^3 \to R^2}$$

Линейность $\widehat{A}_4$ – смотри чертеж.



5. $\hat{A}_5$ – оператор, действующий по закону:

$$A_5\vec{x} = (\vec{a}, \vec{x}),$$

где $\vec{a}$ – фиксированный вектор, $\vec{x} \in R^3$, $(\vec{a}, \vec{x}) \in R^1$.

$$\boxed{\hat{A}_5 : R^3 \to R^1}$$

Линейность:

1) $\hat{A}_5(\vec{x}+\vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}+\vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}) + (\vec{a}, \vec{y}) = \hat{A}_5\vec{x} + \hat{A}_5\vec{y}$;

2) $\hat{A}_5(\lambda\vec{x}) = (\vec{a}, \lambda\vec{x}) = \lambda(\vec{a}, \vec{x}) = \lambda\hat{A}_5\vec{x}$.

$\hat{A}_5$ ***– линейный оператор.***

6. $\hat{D}$ – оператор дифференцирования, действующий в пространстве P_n (множество всех многочленов степени n).

$x(t) \in P_n$, $\hat{D}x(t) = x'(t) \in P_{n-1}$.

$$\boxed{\hat{D} : P_n \to P_{n-1}}$$

$\hat{D}$ ***– линейный оператор*** (см. свойства производных).

Пример нелинейного оператора

$\hat{A}_6 : R^3 \to R^3$.

$\hat{A}_6\vec{x} = k\vec{x} + \vec{a}$, k – фиксированное число, $\vec{a}$ – фиксированный вектор.

$\vec{x} \in R^3$, $k\vec{x} + \vec{a} \in R^3$.

Выясним, является ли оператор $\hat{A}_6$ линейным.

$\hat{A}_6(\vec{x}+\vec{y}) = k(\vec{x}+\vec{y}) + \vec{a} = (k\vec{x}+\vec{a}) + k\vec{y} = \hat{A}_6\vec{x} + k\vec{y} \neq \hat{A}_6\vec{x} + \hat{A}_6\vec{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_6$ ***– нелинейный оператор.***

13.2. Матричная запись линейных операторов

Определение

Линейный оператор $\hat{A}$, переводящий пространство L_n в себя,

$$\boxed{\hat{A}: L_n \to L_n},$$

называется ***линейным преобразованием*** пространства L_n.

Теорема 1 (T1)

Каждому линейному преобразованию пространства L_n с заданным базисом $\mathcal{B}$ однозначно соответствует квадратная матрица порядка n.

Доказательство

Рассмотрим пространство L_n с заданным базисом $\mathcal{B}=(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$.

$$\bar{e}_i \in L_n, \ \hat{A}\bar{e}_i \in L_n.$$

Разложим образ элемента $\bar{e}_i$ по базису $\mathcal{B}$

$$\hat{A}\bar{e}_i = a_{1i}\bar{e}_1 + a_{2i}\bar{e}_{21} + ... + a_{ni}\bar{e}_n.$$

Здесь a_{1i}, a_{2i}, …, a_{ni} – координаты образа базисного элемента с номером i.

$$\hat{A}\bar{e}_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \ i = 1,...,n.$$

Составим матрицу $\mathrm{A} = (a_{ik})$, $i,k = 1,...,n$, записывая ее по столбцам:

1 столбец – координаты $\hat{A}\bar{e}_1$;

2 столбец – координаты $\hat{A}\bar{e}_2$;

…

n столбец – координаты $\hat{A}\bar{e}_n$.

Однозначность матрицы А следует из единственности разложения $\hat{A}\bar{e}_1$ по базису.

Определение

Матрица $A=(a_{ik})$, $i,k=1,\dots,n$, построенная, как в теореме 1, называется ***матрицей линейного преобразования*** $\hat{A}$ пространства L_n с заданным базисом $\mathcal{B}$.

Рассмотрим линейное преобразование $\hat{A}$ пространства L_n с заданным базисом $\mathcal{B}=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n)$.

$$\bar{x}\in L_n,\ \hat{A}\bar{x}=\bar{y}\in L_n.$$

С одной стороны:

$$\bar{y}=\sum_{k=1}^{n} y_k\bar{e}_k .$$

С другой стороны:

$$\bar{y}=\hat{A}\bar{x}=\hat{A}\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{A}(x_i\bar{e}_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{A}\bar{e}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\bar{e}_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i\right)\cdot\bar{e}_k .$$

В силу единственности разложения элемента пространства по базису коэффициенты перед одинаковыми базисными элементами равны, т.е.

$$\boxed{y_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ki}x_i .} \qquad (*)$$

Обозначим

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\bar{y},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\bar{x}.$$

Тогда (*) $\Rightarrow$

$$\boxed{Y=A\cdot X.} \qquad (**)$$

Последнее равенство является ***матричной записью оператора*** $\hat{A}$, переводящего пространство L_n с заданным базисом $\mathcal{B}$ в себя.

По формуле (**), зная координаты исходного элемента $\bar{x}$ в базисе $\mathcal{B}$ и матрицу A оператора $\hat{A}$ в том же базисе, можно найти координаты образа $\bar{x}$, т.е. координаты элемента $\bar{y}$ в базисе $\mathcal{B}$.

Теорема 2 (Т2)

Каждой квадратной матрице порядка n однозначно соответствует линейное преобразование пространства L_n с заданным базисом $\mathcal{B}$.

Теорема $(T1 \cup T2)$

Множеству всех линейных преобразований пространства L_n с заданным базисом $\mathcal{B}$ взаимно однозначно соответствует множество всех квадратных матриц порядка n.

Пример 1

В пространстве R^3 задан базис $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Найти матрицу оператора растяжения $\hat{A}_1\vec{x}=k\vec{x}$.

Решение

$$\hat{A}_1\vec{i}=k\vec{i}=\begin{pmatrix}k\\0\\0\end{pmatrix},\ \hat{A}_1\vec{j}=k\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\k\\0\end{pmatrix},\ \hat{A}_1\vec{k}=k\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}.$$

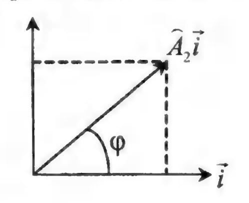
$$\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}k & o & 0\\0 & k & 0\\0 & o & k\end{pmatrix}$$

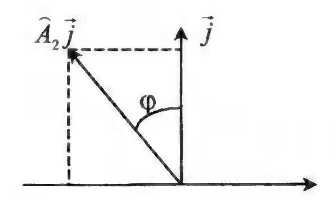
Пример 2

В пространстве R^2 задан базис $\mathcal{B}=\{\vec{i},\vec{j}\}$. Найти матрицу оператора поворота векторов плоскости на угол φ вокруг начала координат. Найти образ вектора $(2\vec{i}+3\vec{j})$.

Решение

Найдем образы базисных векторов





$\widehat{A}_2\vec{i} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\widehat{A}_2\vec{j} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Составим матрицу оператора $\widehat{A}_2$

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Найдем образ заданного вектора

$$\vec{y} \Leftrightarrow \mathrm{Y} = \mathrm{A}_2\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi - 3\sin\varphi \\ 2\sin\varphi + 3\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$\vec{y} = (2\cos\varphi - 3\sin\varphi, 2\sin\varphi + 3\cos\varphi)$,

$\vec{y} = (2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\vec{i} + (2\sin\varphi + 3\cos\varphi)\vec{j}$.

Лекция 14. Действия с линейными операторами

Содержание

1. Действия с линейными операторами вида $\boxed{\widehat{A}: L^n \to L^n}$.
2. Свойства линейных операторов вида $\boxed{\widehat{A}: L^n \to L^n}$.
3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.
4. Линейный оператор в евклидовом пространстве (сопряженный, самосопряженный, ортогональный).

14.1. Действия с линейными операторами вида $\boxed{\widehat{A}: L^n \to L^n}$

I. Сложение линейных операторов

Определение

Суммой операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ называется оператор $\widehat{A} + \widehat{B}$, определенный соотношением:

$$\boxed{(\widehat{A} + \widehat{B})\vec{x} = \widehat{A}\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}}.$$

Из определения и теоремы о взаимно однозначном соответствии следует

$$\boxed{\widehat{A} + \widehat{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} + \mathrm{B}},$$

где матрицы A и B заданы в одном базисе $\mathcal{B}$.

II. Умножение линейного оператора на число

Определение

Произведением оператора $\hat{A}$ на *число* λ называется оператор $\lambda\hat{A}$, определяемый соотношением:

$$\boxed{(\lambda\hat{A})\bar{x} = \lambda(\hat{A}\bar{x})} \Rightarrow \boxed{\lambda\hat{A} \Leftrightarrow \lambda\mathrm{A}} \text{ в } \mathcal{B}$$

III. Произведение линейных операторов

Определение

Произведением линейного оператора $\hat{A}$ на линейный оператор $\hat{B}$ называется линейный оператор $\hat{A}\hat{B}$, определяемый соотношением:

$$\boxed{(\hat{A}\hat{B})\bar{x} = \hat{A}(\hat{B}\bar{x})} \Rightarrow \boxed{(\hat{A}\hat{B}) \Leftrightarrow \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}} \text{ в } \mathcal{B}.$$

Операторы I-III также линейные.

14.2. Свойства линейных операторов вида $\boxed{\hat{A}: L^n \to L^n}$

Определение 1

Тождественным (единичным) называется оператор $\hat{E}$, определяемый соотношением:

$$\boxed{\hat{E}\bar{x} = \bar{x} \quad \forall\bar{x} \in L^n} \Rightarrow \boxed{\hat{E} \Leftrightarrow \mathrm{E}}$$

Определение 2

Обратным оператором $\hat{A}^{-1}$ к линейному оператору $\hat{A}$ называется оператор, для которого справедливо равенство:

$$\boxed{\hat{A}\cdot\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\cdot\hat{A} = \hat{E}.}$$

Определение 3

Невырожденным линейным оператором называется такой оператор, которому соответствует невырожденная квадратная матрица.

Теорема 1

Для всякого невырожденного линейного оператора $\hat{A}$ с матрицей A существует единственный обратный оператор $\hat{A}^{-1}$ с матрицей A^{-1}.

$$\boxed{\hat{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}}$$

(A и A^{-1} в одном базисе $\mathcal{B}$)

Доказательство

По условию $\widehat{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}$, $\det \mathrm{A} \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists \mathrm{A}^{-1}$ – единственная.

$$\boxed{\widehat{A}^{-1} \cdot \widehat{A} = \widehat{A} \cdot \widehat{A}^{-1} = \widehat{E}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}} \;–$$

– по теореме о взаимно однозначном соответствии.

Существование и единственность обратного оператора следует из теоремы о взаимно однозначном соответствии.

14.3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе от одного базиса к другому

Рассмотрим пространство L^n с базисом $\mathcal{B}=\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$. В этом пространстве задан линейный оператор

$$\widehat{A} : L^n \to L^n, \; \widehat{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} \text{ в базисе } \mathcal{B}.$$

Пусть $\mathcal{B}'=\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \ldots, \overline{e}'_n\}$ – другой базис этого же пространства.

$\widehat{A} \Leftrightarrow \mathrm{A}'$ в базисе $\mathcal{B}'$.

Установим связь матриц оператора в исходном (старом) и новом базисах: A и A'.

Теорема 2

$$\boxed{\mathrm{A}' = \mathrm{T}^{-1}_{\beta\to\beta'} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{T}_{\beta\to\beta'}}$$

(без доказательства)

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{T}_{\beta\to\beta'} \cdot \mathrm{A}' \cdot \mathrm{T}^{-1}_{\beta\to\beta'}}$$

14.4. Линейный оператор в евклидовом пространстве (сопряженный, самосопряженный, ортогональный)

Пусть E_n – евклидово пространство размерности n.

1. Сопряженный оператор

Определение

Оператор $\widehat{A}^*$ называется ***сопряженным*** к линейному оператору $\widehat{A}$, если

$$\boxed{\left(\widehat{A}\overline{x}, \overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \widehat{A}^* \overline{y}\right)} \;\; \forall \overline{x}, \overline{y} \in E_n .$$

Теорема 1

Для любого линейного оператора $\hat{A}: E_n \to E_n$ существует единственный сопряженный оператор $\hat{A}^*$, причем если A – матрица оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе $\mathcal{B}_0$, то A^{T} – матрица оператора $\hat{A}^*$ в $\mathcal{B}_0$.

Доказательство

По условию E_n – евклидово пространство, где задан ортонормированный базис $\mathcal{B}_0=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$:

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_k) = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases}$$

Вычислим

$$(\hat{A}\bar{e}_i, \bar{e}_k) = (a_{1i} \cdot \bar{e}_1 + a_{2i} \cdot \bar{e}_2 + ... + a_{ni} \cdot \bar{e}_n, \bar{e}_k) =$$
$$= a_{1i}(\bar{e}_1, \bar{e}_k) + a_{2i}(\bar{e}_2, \bar{e}_k) + ... + a_{ni}(\bar{e}_n, \bar{e}_k) = a_{ki}.$$
$$\boxed{(\hat{A}\bar{e}_i, \bar{e}_k) = a_{ki}}$$

Рассмотрим матрицу $\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$, которой соответствует некоторый оператор $\hat{A}'$.

Вычислим:

$$(\bar{e}_i, \hat{A}'\bar{e}_k) = (\bar{e}_i, a_{k1}\bar{e}_1 + a_{k2}\bar{e}_2 + ... + a_{kn}\bar{e}_n) = \updownarrow \tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \updownarrow =$$
$$= a_{k1}(\bar{e}_i, \bar{e}_1) + a_{k2}(\bar{e}_i, \bar{e}_2) + ... + a_{kn}(\bar{e}_i, \bar{e}_n) = a_{ki}.$$
$$\boxed{(\bar{e}_i, \hat{A}'\bar{e}_k) = a_{ki}}$$

Таким образом, для любых базисных элементов справедливо равенство

$$\boxed{(\hat{A}\bar{e}_i, \bar{e}_k) = (\bar{e}_i, \hat{A}'\bar{e}_k)} \ \forall i, k = 1, 2, ..., n. \qquad (*)$$

Нетрудно показать, что аналогичное равенство имеет место для любых элементов евклидова пространства:

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in E_n$

$$\boxed{\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i; \ \bar{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k \bar{e}_k.} \qquad (**)$$

(*), (**) $\Rightarrow$

$\boxed{(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A}'\bar{y})}$ $\Rightarrow$ таким образом, оператор $\hat{A}'$, соответствующий матрице A^{T}, является сопряженным к оператору $\hat{A}$ (по определению).

Единственность оператора $\widehat{A}^* = \widehat{A}'$ следует из теоремы о взаимно однозначном соответствии матрицы и оператора:

$$\boxed{A^{T} \Leftrightarrow \widehat{A}^*.}$$

Теорема 2

$\widehat{A}^*$ – линейный оператор.

Доказательство

Пусть $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in E_n$, β, γ – вещественные числа.

Вычислим: $\left(\widehat{A}\overline{x}, \beta\overline{y} + \gamma\overline{z}\right) = \left(\overline{x}, \widehat{A}^*\left(\beta\overline{y} + \gamma\overline{z}\right)\right)$ (по определению $\widehat{A}^*$).

С другой стороны:

$$\left(\widehat{A}\overline{x}, \beta\overline{y} + \gamma\overline{z}\right) = \beta\left(\widehat{A}\overline{x}, \overline{y}\right) + \gamma\left(\widehat{A}\overline{x}, \overline{z}\right) = \beta\left(\overline{x}, \widehat{A}^*\overline{y}\right) + \gamma\left(\overline{x}, \widehat{A}^*\overline{z}\right) = \left(\overline{x}, \beta\widehat{A}^*\overline{y} + \gamma\widehat{A}^*\overline{z}\right).$$

Следовательно,

$\boxed{\widehat{A}^*\left(\beta\overline{y} + \gamma\overline{z}\right) = \beta\widehat{A}^*\overline{y} + \gamma\widehat{A}^*\overline{z}}$ $\Rightarrow$ $\widehat{A}^*$ – линейный оператор.

Простейшие свойства сопряженных операторов

1°. $\widehat{E}^* = \widehat{E}$.

2°. $\left(\widehat{A}^*\right)^* = \widehat{A}$.

3°. $\left(\widehat{A} + \widehat{B}\right)^* = \widehat{A}^* + \widehat{B}^*$.

4°. $\left(\lambda\widehat{A}\right)^* = \lambda\widehat{A}^*$.

5°. $\left(\widehat{A} \cdot \widehat{B}\right)^* = \widehat{B}^* \cdot \widehat{A}^*$.

6°. Если $\exists\widehat{A}^{-1}$, то $\left(\widehat{A}^{-1}\right)^* = \left(\widehat{A}^*\right)^{-1}$.

2. Самосопряженный оператор

Определение

Линейный оператор $\widehat{A}: E_n \to E_n$ называется ***самосопряженным***, если

$$\boxed{\widehat{A} = \widehat{A}^*.}$$

Теорема 3

Всякому самосопряженному линейному оператору $\widehat{A}$ в ортонормированном базисе соответствует симметричная матрица.

Доказательство

Рассмотрим пространство E_n с ортонормированным базисом $\mathcal{B}_0$.

$\widehat{A} \Leftrightarrow$ А в базисе $\mathcal{B}_0$.

$\widehat{A}^* \Leftrightarrow$ A^{T} в $\mathcal{B}_0$.

Так как $\boxed{\widehat{A} = \widehat{A}^*} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}}$ $(a_{ik} = a_{ki})$.

Пример симметричной матрицы

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 (обратная)*

Всякий линейный оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную матрицу, является самосопряженным.

Обе теоремы дают простой способ установления факта самосопряженности исследуемого оператора.

Свойства самосопряженных операторов

1°. $\widehat{E}$ – самосопряженный оператор (ССО).

2°. $\widehat{A} + \widehat{B}$ – ССО, если $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ – ССО.

3°. $\lambda\widehat{A}$ – ССО, если $\widehat{A}$ – ССО.

4°. $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ – ССО, если $\widehat{A}$ – ССО, $\widehat{B}$ – ССО.

5°. $\widehat{A}^{-1}$ – (обратный оператор) – ССО, если $\widehat{A}$ – ССО.

3. Ортогональный оператор

Определение

Линейный оператор $\widehat{P}: E_n \to E_n$ называется ***ортогональным***, если

$$\boxed{\left(\widehat{P}\overline{x}, \widehat{P}\overline{y}\right) = \left(\overline{x}, \overline{y}\right)} \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in E_n .$$

Смысл определения: ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение, а значит, сохраняет углы между элементами и длины.

Если $\mathcal{B} = \left\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\right\}$ – ОНБ, то $\left\{\widehat{P}\overline{e}_1, \widehat{P}\overline{e}_2, ..., \widehat{P}\overline{e}_n\right\}$ – ОНБ.

Таким образом, ортогональный оператор переводит один ОНБ в другой ОНБ.

Теорема 4

Для того чтобы линейный оператор $\hat{P}$ был ортогональным, необходимо и достаточно существование $\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{*}$.

Доказательство

Прямая теорема (необходимость)

Условие: $\hat{P}$ – ортогональный оператор.

Утверждение: $\exists \hat{P}^{-1} = \hat{P}^{*}$.

Рассмотрим $\left(\hat{P}\bar{x}, \hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \hat{P}^{*}\hat{P}\bar{y}\right)$; с другой стороны, $\left(\hat{P}\bar{x}, \hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \bar{y}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\bar{x}, \hat{P}^{*}\hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \bar{y}\right)$.

$\hat{P}^{*}\hat{P}\bar{y} = \bar{y}$, $\hat{P}^{*}\hat{P}\bar{y} = \hat{E}\bar{y}$,

$$\boxed{\hat{P}^{*}\hat{P} = \hat{E}.} \tag{1}$$

Аналогично, рассматривая $\left(\hat{P}^{*}\bar{x}, \hat{P}^{*}\bar{y}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{P}\ \hat{P}^{*} = \hat{E}.} \tag{2}$$

(1), (2) $\Rightarrow$ $\hat{P}^{-1} = \hat{P}^{*}$.

Существование $\hat{P}^{-1}$ обеспечено существованием $\hat{P}^{*}$.

Обратная теорема (достаточность)

Условие: $\exists \hat{P}^{-1} = \hat{P}^{*}$;

Утверждение: $\hat{P}$ – ортогональный оператор.

Рассмотрим $\left(\hat{P}\bar{x}, \hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \hat{P}^{*}\hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \hat{P}^{-1}\hat{P}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \hat{E}\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \bar{y}\right)$.

Определение

Квадратная матрица P порядка n называется ***ортогональной***, если

$$\boxed{\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}^{-1}.}$$

Теорема 5

Для того чтобы линейный оператор $\hat{P}$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица P была ортогональной в ОНБ пространства E_n.

$\widehat{P}$ – ортогональный оператор ⇔ P – ортогональная матрица в ОНБ

Алгоритм установления ортогональности оператора

1. Фиксируем ОНБ $\mathcal{B}_0$.
2. Строим P в $\mathcal{B}_0$.
3. Находим P^T.
4. Вычисляем $P^T P$ и PP^T.
5. Если $P^T P = PP^T = E \Rightarrow$ P – ортогональная матрица, $\widehat{P}$ – ортогональный оператор.

Лекция 15. Системы линейных уравнений

Содержание

1. Системы m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Однородные системы линейных уравнений.

15.1. Системы m линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

– общий вид системы.

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица системы (составлена из коэффициентов при неизвестных) размера $(m \times n)$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица неизвестных размера $(n \times 1)$.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица свободных членов размера $(m \times 1)$.

С учетом введенных обозначений система (*) равносильна матричному уравнению

$$\boxed{AX = B}.$$

Основная терминология

Определение 1

Решением системы (*) называется совокупность значений x_1, x_2, ..., x_n, обращающих каждое уравнение системы в верное равенство (тождество).
Обозначение: $\bar{e} = (x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow X$.

Определение 2

Система называется ***совместной***, если решение существует, и несовместной в противном случае.

Замечание

Совместная система может быть ***определенной*** – решение единственно, или ***неопределенной***, когда решений множество.

Определение 3

Матрица

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ размера $(m \times (n+1))$

называется расширенной матрицей системы (*).

Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы система (*) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\boxed{r(\mathrm{A}) = r(\widetilde{\mathrm{A}}).}$$

Необходимость предоставляется доказать самостоятельно.

Достаточность

Условие: $r(\mathrm{A}) = r(\widetilde{\mathrm{A}})$;

Утверждение: система (*) – совместна.

Доказательство

Пусть $r(\mathrm{A}) = r(\widetilde{\mathrm{A}}) = r$. Тогда существует базисный минор M_r, целиком расположенный в A. В этом случае столбец свободных членов B – небазисный и может быть представлен в виде линейной комбинации базисных столбцов матрицы A. Более того, столбец B может быть представлен в виде линейной комбинации всех столбцов матрицы A (путем приписывания остальных небазисных столбцов с нулевыми коэффициентами):

$$\boxed{\mathrm{B} = c_1\mathrm{A}_1 + c_2\mathrm{A}_2 + \ldots + c_n\mathrm{A}_n.}$$

Здесь c_1, c_2, …, c_n – вещественные числа, A_1, A_2, …, A_n – столбцы матрицы A.

Сравнение поэлементной записи выделенного матричного равенства

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_n \end{cases} \qquad (**)$$

с данной системой уравнений (*) позволяет сделать вывод о том, что $\bar{e} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – решение системы (*), а следовательно, система (*) – совместна, что и требовалось доказать.

15.2. Однородные системы линейных уравнений

Определение

Система (*) называется ***однородной***, если $\mathrm{B} = \mathrm{O}$.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\
a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\
\ldots\\
a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=0.
\end{cases}
\qquad (***)
$$

Для однородной системы всегда выполняется равенство

$$r(\mathrm{A})=r(\widetilde{\mathrm{A}})$$

(нулевой столбец не меняет ранг матрицы).
Поэтому *однородная система всегда совместна.*

$\boxed{\bar{e}_0=(0,0,\ldots,0)}$ – ***тривиальное*** или нулевое решение однородной системы.

Теорема 1

Для того чтобы однородная система (***) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $r(\mathrm{A})<n$.

Необходимость

Условие: $\exists\bar{e}\neq\bar{e}_0$.

Утверждение: $r(\mathrm{A})=r<n$.

Доказательство

Ранг матрицы A не может быть больше n: ранг не превышает числа столбцов или строк.
Ранг матрицы A не может быть равен n: если $r=n$ главный определитель системы $\Delta\neq0$, существует единственное решение системы, которое может быть найдено по формулам Крамера

$$\boxed{x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}\,(\Delta_i=0)\Rightarrow x_i=0.}$$

То, что это решение тривиальное, противоречит условию, следовательно, доказательство завершено.

Теорема 2 (следствие Теоремы 1)

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\boxed{\Delta=0.}$$

Свойства решений однородной системы

1°. Линейная комбинация решений системы (***) является решением (***).

2°. Система (***) имеет $n-r$ линейно независимых решений (n – число неизвестных, r – ранг матрицы).

Доказательство

По условию $r<n$. Пусть M_r – базисный минор, расположенный в левом верхнем углу матрицы A. Возьмем первые r уравнений системы. В левой части оставим первые r неизвестных – базисные неизвестные (соответствующие базисным столбцам).

Остальные (свободные) неизвестные перенесем в правую часть. В дальнейшем такую систему будем называть ***укороченной***.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2r}x_r=-a_{2r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{2n}x_n, \\ \ldots \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{r2}x_2=-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Присвоим свободным переменным определенные значения: $x_{r+1}=1$, $x_{r+2}=0$, …, $x_n=0$. Вычислим значения базисных переменных, которые составят единственное решение укороченной системы $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$. Таким же образом получаем единственное решение укороченной системы для другого набора значений свободных переменных $x_{r+1}=0$, $x_{r+2}=1$, …, $x_n=0$ (обратите внимание на позицию значения 1) $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)$. В итоге имеем следующие решения системы (***)

$$\bar{e}_1=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r,1,0,\ldots,0),$$
$$\bar{e}_2=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r,0,1,\ldots,0),$$
$$\ldots$$
$$\bar{e}_{n-r}=(j_1,j_2,\ldots,j_r,0,0,\ldots,1).$$

Решения $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_{n-r}$ являются *линейно независимыми*, так как ранг соответствующей матрицы равен $n-r$ (смотри блок из единиц и нулей).

Определение

$n-r$ линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений называются ***фундаментальной системой решений***.

Теорема

Любое решение системы (***) можно представить в виде линейной комбинации решений из фундаментальной системы.

Доказательство

Свойство 1° $\Rightarrow$ ***множество решений*** $\bar{e}$ ***– линейное пространство.***

Свойство 2° $\Rightarrow$ ***размерность пространства решений равна*** $n-r$.

Свойство 3° $\Rightarrow$ ***фундаментальная система решений – базис пространства решений.***

Любое решение можно разложить по базису!

$$\boxed{\bar{e}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\ldots+\alpha_{n-r}\bar{e}_{n-r}}$$

Что и требовалось доказать.

Определение

Общим решением системы (***) называется решение вида

$$\boxed{\bar{e}=c_1\bar{e}_1+c_2\bar{e}_2+\ldots+c_{n-r}\bar{e}_{n-r},}$$

где c_1, c_2, …, c_{n-r} – произвольные постоянные, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, …, $\bar{e}_{n-r}$ – фундаментальная система решений.

Любое конкретное (частное) решение содержится в общем и соответствует конкретным значениям c_1, c_2, …, c_{n-r}.

Метод нахождения фундаментальной системы решения описан в доказательстве *Свойства 2°*.

Пример

Решить систему

$$\begin{cases}2x_1-x_2+5x_3+7x_4=0,\\4x_1-2x_2+7x_3+5x_4=0,\\2x_1-x_2+x_3-5x_4=0.\end{cases}$$

Так как ранг матрицы коэффициентов равен двум, неизвестные распределяются на две базисных и две свободных. Система имеет множество решений, все они содержатся в общем решении

$$\boxed{\bar{e}=c_1\bar{e}_1+c_2\bar{e}_2.}$$

Для отыскания базисных решений $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ (фундаментальная система решений) выбираем ненулевой минор второго порядка, например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Составим соответствующую укороченную систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = x_2 - 7x_4, \\ 4x_1 + 7x_3 = 2x_2 - 5x_4. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений.

$\bar{e}_1:\ x_2 = 1,\ x_4 = 0$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_3 = 2. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение (для базисных неизвестных)

$x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = 0$.

Таким образом, первое из решений фундаментальной системы найдено

$$\boxed{\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right).}$$

Аналогично находится второе решение.

$\bar{e}_2:\ x_2 = 0,\ x_4 = 1$.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = -7, \\ 4x_1 + 7x_3 = -5. \end{cases}$$

$x_1 = 4,\ x_3 = -3$.

$$\boxed{\bar{e}_2 = (4, 0, -3, 1)}$$

Ответ: $\bar{e} = c_1\left(\dfrac{1}{2}, 1, 0, 0\right) + c_2(4, 0, -3, 1)$.

Лекция 16. Неоднородные системы линейных уравнений

Содержание

1. Неоднородные системы линейных уравнений.
2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$.

3. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора $\widehat{A}$.

16.1. Неоднородные системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Определение

Система (*) называется ***неоднородной***, если среди чисел b_1, b_2, …, b_m имеется хотя бы одно, не равное нулю.

Обозначим

$$\mathrm{A} = (a_{ij}) - [m \times n],$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - [n \times 1],$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - [m \times 1].$$

Тогда система (*) может быть представлена одним матричным уравнением

$$\boxed{\mathrm{AX} = \mathrm{B}}.$$

Схема решения неоднородной системы

1. Вычислим и сравним $r(\mathrm{A})$, $r(\widetilde{\mathrm{A}})$:

а) если $r(\mathrm{A}) \neq r(\widetilde{\mathrm{A}})$, система (*) несовместна (система решений не имеет);

б) если $r(\mathrm{A}) = r(\widetilde{\mathrm{A}}) = r$, система (*) совместна.

2. Сравниваем r и n (число неизвестных):

а) если $r = n$, то существует единственное решение, которое может быть найдено, например, по формулам Крамера

$$\overline{x} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right),$$

где Δ – главный определитель системы ($\Delta \neq 0$), Δ_i – определитель, полученный из главного заменой i-го столбца столбцом свободных членов;

б) если $r < n$, то существует множество решений, все они содержатся в общем решении (*).

Теорема (о структуре общего решения неоднородной системы)

Общее решение $\overline{x}$ системы (*) равняется сумме частного решения системы (*) $\widetilde{e}$ и общего решения $\left(c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + \ldots + c_{n-r}\overline{e}_{n-r}\right)$ соответствующей однородной системы (система (*)), где все $b_i = 0$).

$$\boxed{\overline{x} = \widetilde{e} + \left(c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 + \ldots + c_{n-r}\overline{e}_{n-r}\right)}$$

Доказательство

Осуществляется непосредственной подстановкой $\overline{x}$ в (*).

Метод отыскания частного решения $\widetilde{e}$

Запишем укороченную систему из r базисных уравнений. Оставим в левой части только r базисных неизвестных. Всем свободным неизвестным (их $n-r$) присвоим нулевые значения. Решение полученной системы есть искомое $\widetilde{e}$.

16.2. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$

Рассмотрим пространство L^n с базисом $\mathcal{B} = \left(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\right)$.

$\bar{x} \in L^n$, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$,
$\bar{0} \in L^n$, $\bar{0} = (0,0,...,0)$.

Пусть $\hat{A} : L^n \to L^n$ – линейный оператор.

Определение

Пусть число λ и элемент $\bar{x} \neq \bar{0}$ таковы, что имеет место связь

$$\boxed{\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}\,.} \tag{1}$$

Тогда λ называют ***собственным значением***, а элемент $\bar{x}$ ***собственным вектором*** линейного оператора $\hat{A}$.

Запишем уравнение (1) в другой форме

$$\left(\hat{A} - \lambda\hat{E}\right)\bar{x} = \bar{0}\,, \tag{2}$$

здесь $\hat{E}$ – тождественный оператор. По теореме о взаимно однозначном соответствии оператора и матрицы операторному уравнению (2) соответствует матричное

$$(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})\mathrm{X} = \mathrm{O}. \tag{3}$$

Поэлементная запись уравнения (3) приводит к однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Необходимым и достаточным условием существования ненулевых решений этой системы является равенство нулю ее главного определителя

$$\boxed{\det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) = 0\,.} \tag{5}$$

Равенство (5) является уравнением относительно λ и называется ***характеристическим уравнением*** оператора $\hat{A}$. Его левая часть называется ***характеристическим многочленом***.

Корни характеристического уравнения λ_1, λ_2, ..., λ_n являются собственными значениями оператора $\hat{A}$ и называются ***спектром оператора*** $\hat{A}$.

Чтобы найти собственные векторы, отвечающие конкретному собственному значению, нужно решить систему (4), подставив вместо λ это конкретное значение.

Теорема (об инвариантности характеристического многочлена)
Характеристический многочлен не меняется при переходе к другому базису.

Доказательство
Рассмотрим оператор $\hat{A}: L^n \to L^n$. Пусть A и A' – матрицы этого оператора в базисах $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}'$ соответственно.
Рассмотрим характеристический многочлен в базисе $\mathcal{B}'$

$$\det(\mathrm{A}' - \lambda\mathrm{E}) = \det\left(\mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{T}_{\mathrm{B}\to\mathrm{B}'} - \lambda\mathrm{E}\right) = \det\left\{\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E})\mathrm{T}\right\} =$$

$$= \det\mathrm{T}^{-1} \cdot \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) \cdot \det\mathrm{T} = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}) \cdot \det\mathrm{T}^{-1} \cdot \det\mathrm{T} =$$

$$= \updownarrow \det\mathrm{T}^{-1} \cdot \det\mathrm{T}^{1} = \det\mathrm{E} = 1 \updownarrow = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E}).$$

Последнее выражение является характеристическим многочленом в базисе $\mathcal{B}$. Что и требовалось доказать.

Пример
Найти собственные значения и собственные векторы оператора с матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим матрицу $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 9 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение

$$(1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

имеет корни $\boxed{\lambda_1 = -2}$, $\boxed{\lambda_2 = 4}$ – искомые собственные значения оператора $\hat{A}$.
Найдем собственные векторы, отвечающие собственному значению $\boxed{\lambda = \lambda_1 = -2}$.

По матрице

$$A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

составляем однородную систему

$$\begin{cases}3x_1+9x_2=0,\\ x_1+3x_2=0.\end{cases}$$

Ранг основной матрицы этой системы

$$r(A-\lambda_1 E)=1.$$

Поэтому общее решение системы, в котором содержатся все собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_1, имеет вид:

$$\boxed{\overline{x}^{(\lambda_1)}=c_1\overline{e}_1.}$$

Базисное решение $\overline{e}_1$ найдем, используя укороченную систему

$$x_1=-3x_2.$$

Присвоим *свободной* переменной x_2 значение 1 и вычислим значение *базисной* переменной x_1. В итоге получаем

$$\overline{e}_1=(-3{,}1) \text{ и } \boxed{\overline{x}^{(\lambda_1)}=c_1(-3{,}1)}.$$

Аналогично

$$\boxed{\overline{x}^{(\lambda_2)}=c_2(3{,}1).}$$

16.3. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора $\widehat{A}$

1°. Собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения оператора $\widehat{A}$, причем $\lambda_1\neq\lambda_2$.

$\lambda_1\to\overline{x}^{(\lambda_1)}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1;

$\lambda_2\to\overline{x}^{(\lambda_2)}$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_2.

Составим нулевую линейную комбинацию

$$\alpha\overline{x}^{(\lambda_1)} + \beta\overline{x}^{(\lambda_2)} = \overline{0}.$$

Подействуем на равенство оператором $\widehat{A}$. Результат для левой части

$$\widehat{A}\left(\alpha\overline{x}^{(\lambda_1)} + \beta\overline{x}^{(\lambda_2)}\right) = \widehat{A}\left(\alpha\overline{x}^{(\lambda_1)}\right) + \widehat{A}\left(\beta\overline{x}^{(\lambda_2)}\right) = \alpha\widehat{A}\overline{x}^{(\lambda_1)} + \beta\widehat{A}\overline{x}^{(\lambda_2)} =$$

$$= \alpha\lambda_1\overline{x}^{(\lambda_1)} + \beta\lambda_2\overline{x}^{(\lambda_2)}.$$

Результат для правой части

$$\widehat{A}\overline{0} = \overline{0}.$$

Окончательный результат воздействия оператора на линейную комбинацию

$$\alpha\lambda_1\overline{x}^{(\lambda_1)} + \beta\lambda_2\overline{x}^{(\lambda_2)} = \overline{0}.$$

Если выполнить почленное вычитание из этой линейной комбинации исходной, умноженной на λ_1, получим равенство

$$\beta(\lambda_1 - \lambda_2)\overline{x}^{(\lambda_2)} = \overline{0},$$

из которого следует

$$\boxed{\beta = 0,}$$

так как $\overline{x}^{(\lambda_2)} \neq \overline{0}$ (собственный вектор) и $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ (по условию).

Аналогично (умножая исходную линейную комбинацию на λ_2)

$$\boxed{\alpha = 0.}$$

Таким образом, линейная комбинация обращается в ноль лишь тогда, когда

$$\alpha = \beta = 0.$$

Откуда следует, что $\overline{x}^{(\lambda_1)}$ и $\overline{x}^{(\lambda_2)}$ – линейно независимы, что и требовалось доказать.

Обобщение свойства 1°

Собственные векторы, отвечающие *попарно различным* собственным значениям линейного оператора, линейно независимы.

2°. Матрица A линейного оператора $\widehat{A}$ в базисе из его собственных векторов диагональна.

Доказательство

Пусть λ_1, λ_2, …, λ_n – собственные значения $\widehat{A}: L_n \to L_n$.

Пусть $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, ..., $\overline{e}_n$ – соответствующие собственные векторы.

Если $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, ..., $\overline{e}_n$ – линейно независимы, то они могут рассматриваться в качестве базиса. Найдем матрицу A оператора $\hat{A}$ в этом базисе. Для этого найдем образы каждого из базисных элементов.

$$\hat{A}\overline{e}_1 = \lambda_1\overline{e}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}\overline{e}_2 = \lambda_2\overline{e}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

....

$$\hat{A}\overline{e}_n = \lambda_n\overline{e}_n \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что не всегда построение базиса из собственных векторов возможно.

3°. Собственные векторы линейного *самосопряженного* оператора $\hat{A}$, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство

Пусть λ_1, λ_2 – собственные значения оператора $\hat{A}$, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\lambda_1 \to \overline{x}_1$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1;

$\lambda_2 \to \bar{x}_2$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_2.
Рассмотрим скалярное произведение

$$\left(\hat{A}\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \left(\lambda_1 \bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \lambda_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right).$$

Аналогично

$$\left(\bar{x}_1, \hat{A}\bar{x}_2\right) = \left(\bar{x}_1, \lambda_2 \bar{x}_2\right) = \lambda_2\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right).$$

Так как для самосопряженного оператора справедливо равенство

$$\left(\hat{A}\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \left(\bar{x}_1, \hat{A}\bar{x}_2\right),$$

можно записать

$$\lambda_1\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = \lambda_2\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right).$$

Отсюда следует

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = 0.$$

Далее, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right) = 0$, что и означает ортогональность собственных векторов.

Обобщение свойства 3°

Собственные векторы, отвечающие *попарно различным* собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны.

4°. Корни характеристического многочлена линейного *самосопряженного* оператора $\hat{A}$ вещественны.

Перечисленные свойства собственных векторов и собственных значений позволяют заметить преимущества базиса, построенного из собственных векторов линейного или линейного самосопряженного оператора.

Лекция 17. Теория квадратичных форм и ее геометрические приложения

Содержание

1. Квадратичные формы.
2. Приложения теории квадратичных форм к геометрическим задачам в пространствах R^2 и R^3.

17.1. Квадратичные формы

Определение 1

Квадратичная форма – выражение вида

$$\boxed{k(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \, .} \qquad (1)$$

Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица квадратной формы, удовлетворяющая условию $A = A^T$ (симметричная матрица).

Рассмотрим матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ X^T = (x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n).$$

(1) ⇒ (1*)

$$\boxed{k(X) = X^T A X} \qquad (1^*)$$

$$(1 \times n) \quad (n \times n) \quad (n \times 1)$$

Таким образом, квадратичная форма – матрица размера (1×1).

Пример

Составить матрицу квадратичной формы

$$k(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_2 x_3 - 6x_1 x_3 \, .$$

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим евклидово пространство L^n с ортонормированным базисом $\mathcal{B}_0$.

$\overline{x} \in L^n$, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $\widehat{A} = \widehat{A}^*$ (самосопряженный оператор), то

$$\widehat{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \text{ в } \mathcal{B}_0.$$

Определение 2

Квадратичной формой $k(\overline{x})$ называется скалярное произведение $(\overline{x}, \widehat{A}\overline{x})$.

$$\boxed{k(\overline{x}) = (\overline{x}, \widehat{A}\overline{x})}$$

Теорема

Определение 1 и определение 2 эквивалентны.

Доказательство

Рассмотрим $(\overline{x}, \widehat{A}\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{x}') = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, что и требовалось доказать.

Определение

Если матрица A квадратичной формы диагональна, то квадратичная форма называется ***канонической***.

Теорема

Всякую квадратичную форму можно привести к каноническому виду путем перехода к ортонормированному базису из собственных векторов соответствующего самосопряженного оператора.

Пример

Для неканонической квадратичной формы $k(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ с матрицей

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

выполнить:

1) переход к каноническому виду;

2) указать преобразование, с помощью которого осуществляется переход.

Решение

1. Строим ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\widehat{A}$, с матрицей A в исходном ортонормированном базисе, определяющем направление осей координат Ox_1, Ox_2.

а) Находим спектр оператора $\widehat{A}$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5-\lambda)^2 - 9 = 0,$$

$$\lambda_1 = 2\,;\ \lambda_2 = 8$$ – *простой* спектр ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

б) Находим собственные векторы оператора $\widehat{A}$.

$$\boxed{\lambda = \lambda_1}$$

$$\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг полученной однородной системы линейных уравнений равен единице.

Соответствующая укороченная система имеет вид:

$$3x_1 = 3x_2.$$

Здесь x_2 – свободная переменная, x_1 – базисная переменная.

Присваиваем свободной переменной значение $x_2 = 1$, значение базисной переменной вычисляем $x_1 = 1$. Таким образом найдено базисное решение

$$\boxed{\bar{f}_1 = (1,1)}$$

для множества решений системы, которое является множеством собственных векторов оператора $\widehat{A}$, соответствующих собственному значению λ_1.

$$\boxed{\lambda = \lambda_2}$$

$$A-\lambda_2 E=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}-3x_1-3x_2=0,\\ -3x_1-3x_2=0;\end{cases}$$

$$3x_1=-3x_2.$$

Присваиваем свободной переменной значение $x_2=1$, значение базисной переменной вычисляем $x_1=-1$. Таким образом найдено базисное решение

$$\boxed{\bar{f}_2=(-1,1)}$$

для множества решений системы, которое является множеством собственных векторов оператора $\hat{A}$, соответствующих собственному значению λ_2.

Заметим, что $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ – *ортогональны*, что и следовало ожидать, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

в) Нормируем найденные собственные векторы.

$$\bar{e}_1'=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\bar{e}_2'=\frac{(-1,1)}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Искомый ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{A}$:

$$\mathcal{B}'_0=(\bar{e}_1',\bar{e}_2').$$

Матрица оператора в этом базисе имеет диагональный вид

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix},$$

а квадратичная форма становится канонической (исчезло смешанное произведение).

$$\boxed{k(x_1',x_2')=2x_1'^2+8x_2'^2}$$

2. Преобразование перехода от базиса $\mathcal{B}_0$ к базису $\mathcal{B}'_0$ описывается ортогональной матрицей

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл этого ортогонального преобразования – поворот векторов плоскости на угол 45° против часовой стрелки вокруг начала координат.

17.2. Приложения теории квадратичных форм к геометрическим задачам в пространствах R^2 и R^3

Вернемся к задачам приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка. Рассмотрим для определенности уравнение

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Эквивалентная матричная форма имеет вид:

$$X^T \cdot A \cdot X + B \cdot X + c = 0,$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ – матрицы квадратичной и линейной формы в ортонормированном базисе $\mathcal{B}_0 = \{i, j\}$, которому соответствует исходная система координат OXY.

Процедура канонизации уравнения второго порядка состоит, вообще говоря, из двух этапов.

1 этап. Приведение к каноническому виду квадратичной формы

$$k(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

Цель – убрать смешанное произведение $2a_{12}xy$.

Метод – переход к новому ортонормированному базису $\mathcal{B}'_0$ из собственных векторов соответствующего самосопряженного оператора. Пусть U – матрица перехода от старого базиса к новому. Перепишем исходное матричное уравнение в равносильном виде

$$X^T \cdot U \cdot U^T \cdot A \cdot U \cdot U^T \cdot X + B \cdot U \cdot U^T X + c = 0.$$

Используя известные формулы перехода от одного базиса к другому для матрицы оператора, для координат вектора получим

$$\mathrm{X}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}' \cdot \mathrm{X}' + \mathrm{B}' \cdot \mathrm{X}' + c = 0 .$$

Здесь $\mathrm{X}' = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}' = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \cdot \mathrm{U} = \begin{pmatrix} b_1' & b_2' \end{pmatrix}$.

Итог –

$$- \boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b_1' x' + b_2' y' + c = 0 .}$$

Геометрический смысл – переход к новой системе координат $OX'Y'$ с помощью ортогонального преобразования (поворот, зеркальное отражение), которое не меняет длин и углов между векторами и, следовательно, не искажает форму исходного геометрического объекта (кривой или поверхности).

2 этап. Завершение процедуры канонизации (в случае необходимости, если $\lambda_1 \neq 0$, $b_1' \neq 0$ (или $\lambda_2 \neq 0$, $b_2' \neq 0$))

Цель – убрать в уравнении $b_1' x'$ ($b_2' y'$).

Метод – процедура выделения полного квадрата по переменной x' (y').

Геометрический смысл – переход к системе координат $O''X''Y''$ с помощью параллельного переноса.

Итог – каноническое уравнение.

Пример

Определить тип кривой

$$5x^2 + 12xy + 5y^2 - 22x - 12y - 18 = 0$$

и построить чертеж.

Решение

1 этап

Квадратичная форма $k(x, y) = 5x^2 + 12xy + 5y^2$.

Матрица квадратичной формы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, матрица линейной формы $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -22 & -12 \end{pmatrix}$ в исходном базисе $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Спектр соответствующего самосопряженного оператора:

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1 &= -1,\\ \lambda_2 &= 11.\end{aligned}}$$

Собственные векторы:

$$\boxed{\lambda = \lambda_1} \Rightarrow \boxed{\bar{f}_1 = (1,-1)}$$
$$\boxed{\lambda = \lambda_2} \Rightarrow \boxed{\bar{f}_2 = (1,1)}.$$

Матрица перехода к новому ортонормированному базису из собственных векторов соответствует повороту исходной системы координат на угол $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке вокруг начала координат:

$$U = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы квадратичной и линейной формы в новом базисе:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix},\ B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -10 & -34 \end{pmatrix}.$$

Итог первого этапа:

$$\boxed{-x'^2 + 11y'^2 - 5\sqrt{2}x' - 17\sqrt{2}y' - 18 = 0\,.}$$

Так как уравнение остается неканоническим требуется переход ко второму этапу канонизации.

2 этап

После процедуры выделения полного квадрата по обеим переменным получаем

$$-\left(x' + 5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 11\left(y' - 17\frac{\sqrt{2}}{22}\right)^2 - \left(18 - \frac{25}{2} + \frac{17^2}{11}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

Остается ввести новые обозначения

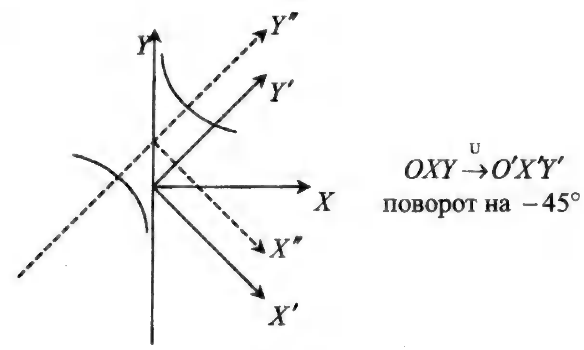
$$\boxed{\begin{aligned} x' + 5\frac{\sqrt{2}}{2} &= x''\\ y' - 17\frac{\sqrt{2}}{22} &= y''\end{aligned}}$$

и записать итоговое каноническое уравнение

$$\boxed{\frac{y''^2}{c/11} - \frac{x''^2}{c} = 1},$$

где $c = \left(18 - \frac{25}{2} + \frac{17^2}{11} \cdot \frac{1}{2}\right)$.

Полученное каноническое уравнение задает гиперболу, пересекающую ось $O''Y''$.



V. Введение в математический анализ

Лекция 18. Числовая последовательность и ее предел

Содержание

1. Множества вещественных чисел (частные случаи).
2. Числовая последовательность, ее предел.

18.1. Множества вещественных чисел (частные случаи)

1°. Отрезок $[a,b]$:

$$a \le x \le b\,.$$

2°. Интервал (a,b):

$$a < x < b\,.$$

3°. Окрестность точки C – любой интервал, содержащий точку C.

4°. ε – окрестность точки C – интервал $(C+\varepsilon, C+\varepsilon)$.



Верхние и нижние грани множества вещественных чисел

Определение

Множество элементов $\{x\}$ называется ***ограниченным сверху***, если существует число $M : \forall x \in \{x\} \Rightarrow x \le M$.

M – ***верхняя грань множества*** $\{x\}$.

Примеры

1°. $\{x\}_1 = \{1,-2,3,5\}$. $M = 5$; $M = 6$; $M = 7$; …

2°. $\{x\}_2 = [1,2]$. $M = 2$; $M = 5{,}3$; …

3°. $\{x\}_3 = (-\infty,5)$. $M = 5$; $M = 6{,}4$; $M = 7$;…

Теорема

Любое, ограниченное сверху, множество имеет бесконечное число верхних граней.

Определение

Наименьшая из всех верхних граней $\{x\}$ называется ***точной верхней гранью*** множества $\{x\}$ и обозначается:

$$\bar{x} \equiv \sup\{x\} \text{ («супремум»).}$$

В рассмотренных примерах:

1°. $\bar{x} = 5$;

2°. $\bar{x} = 2$;

3°. $\bar{x} = 5$.

Определение

Множество $\{x\}$ называется ***ограниченным снизу***, если

$$\exists m : \forall x \in \{x\} \Rightarrow x \geq m,$$

где m – ***нижняя грань*** $\{x\}$.

В рассмотренных примерах $\{x\}_1$, $\{x\}_2$ – ограничены снизу.

Определение

Наибольшая из всех нижних граней называется ***точной нижней гранью*** и обозначается

$$\underline{x} \equiv \inf\{x\} \text{ («инфимум»).}$$

В примерах:

1°. $\underline{x} = -2$;

2°. $\underline{x} = 1$.

Теорема (о существовании точной грани)

Если множество вещественных чисел ограничено сверху (снизу), то $\exists \bar{x}(\underline{x})$.

Определение

Множество $\{x\}$ называется ***ограниченным***, если оно ограничено сверху и снизу, то есть если $\exists M > 0 : \forall x \in \{x\} \Rightarrow |x| \leq M$.

Примеры

1°. $\{x\}_4 = (5,+\infty)$ – неограниченное множество, так как является ограниченным только снизу.

2°. $\{x\}_5 = (-\infty;+\infty)$ – неограниченное множество.

3°. $\{x\}_6 = [2,7]$, $\{x\}_7 = [2,7)$, $\{x\}_8 = (2,7]$, $\{x\}_9 = (2,7)$ – ограниченные множества.

18.2. Числовая последовательность, ее предел

Определение

Если каждому числу n натурального ряда поставлено в соответствие число x_n, то множество занумерованных чисел $\{x_n\}$ называется ***последовательностью***.

Все определения и теоремы, сформулированные для ограниченных множеств и их граней, справедливы и для последовательностей.

Примеры

1°. $\{(-1)^n\}$ – ограниченная последовательность, $\overline{x} = 1$, $\underline{x} = -1$.

2°. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – ограниченная последовательность, $\overline{x} = 1$, $\underline{x} = 0$.

3°. $\{n\}$ – неограниченная последовательность, $\underline{x} = 1$.

Определение

Последовательность называется ***бесконечно малой*** (сходящейся к нулю), если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пример

$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность, так как для любого положительного ε можно указать $N(\varepsilon)$ такой, что будет выполняться неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Действительно, из неравенства $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ следует $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, найдена формула для номера $N(\varepsilon)$:

$$\boxed{N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]},$$

где $[x]$ – *целая часть* числа x (наибольшее целое число, не превосходящее x).

Пусть $\varepsilon = 0{,}001$, тогда $N(\varepsilon) = 1000$.

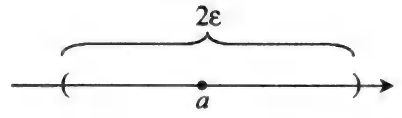
Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся к числу*** a, если $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$.

Обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого ***все элементы*** числовой последовательности попадают в ε-окрестность точки a.



Пример

$\{x_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Докажем, что $a = 1$ – предел рассматриваемой последовательности.

Доказательство

Доказать требуемое – означает найти формулу для $N(\varepsilon)$.

Для этого следует для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотреть неравенство $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

Разрешить его относительно n:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Результат позволяет указать формулу для искомого номера

$$\boxed{N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.}$$

Подчеркнем, что $N(\varepsilon)$ определяется не единственным образом, например $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 2, \ldots$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если $\forall A > 0\ \ \exists N(A) : \forall n > N(A) \Rightarrow |x_n| > A$.

Обозначение:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.}$$

Свойства сходящихся последовательностей

1°. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ с пределом a может быть представлена в виде

$$x_n = a + \alpha_n,$$

где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

Доказательство

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon)\ \ |x_n - a| < \varepsilon$.

Рассмотрим $\alpha_n = x_n - a,$, тогда утверждение: $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N(\varepsilon) :\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow$ $\Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0},$$

что и требовалось доказать.

2°. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Доказательство

Используем метод доказательства от противного. Пусть a и b – два предела сходящейся последовательности $\{x_n\}$.

Свойство 1° $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{c}
x_n = a + \alpha_n, \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0 \\
- \\
x_n = b + \beta_n, \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0 \\
\hline
\alpha_n - \beta_n = b - a
\end{array}
$$

$b-a$ – константа, не зависящая от n, но, с другой стороны, $b-a=\alpha_n-\beta_n$ – зависит от n. Полученное противоречие подтверждает единственность предела сходящейся последовательности $a=b$.

Пример 1

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$. Найти $N(\varepsilon)$ для $\varepsilon=0{,}01$.

Решение

а) Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$.

Рассмотрим неравенство, задающее ε-окрестность точки $a=0$.

$|x_n - a| < \varepsilon,$

$\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < \varepsilon,$

$\dfrac{1}{n^2} < \varepsilon,$

$n^2 > \dfrac{1}{\varepsilon},$

$n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$

В результате появляется возможность указать формулу для номера

$$\boxed{N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right].}$$

б) Если $\varepsilon = 0{,}01$, соответствующий номер принимает значение $N(\varepsilon)=10$.

Пример 2

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+2}=0$.

Решение

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим неравенство, задающее ε-окрестность точки $a = 0$.

$$\left|\frac{2n}{n^2+2}\right|<\varepsilon,$$

$$\frac{n^2+2}{2n}>\frac{1}{\varepsilon},$$

$$n^2+2-\frac{2n}{\varepsilon}>0,$$

$$n_{1,2}=\frac{1}{\varepsilon}\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-2}.$$

$$\boxed{N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}-2}\right].}$$

Найденная формула завершает доказательство.

Лекция 19. Число е

Содержание

1. Монотонные последовательности.
2. Число е.
3. Подпоследовательности и их свойства.

19.1. Монотонные последовательности

Определение

Если каждый последующий член последовательности $\{x_n\}$:

а) не меньше предыдущего

$$\forall x_n \in \{x_n\} \Rightarrow \boxed{x_n \le x_{n+1}},$$

последовательность называется ***неубывающей***.

б) больше предыдущего

$$\forall x_n \in \{x_n\} \Rightarrow \boxed{x_n < x_{n+1}},$$

последовательность называется ***возрастающей***.

в) не больше предыдущего

$$\forall x_n \in \{x_n\} \Rightarrow \boxed{x_n \ge x_{n+1}},$$

последовательность называется ***невозрастающей***.

г) меньше предыдущего

$$\forall x_n \in \{x_n\} \Rightarrow \boxed{x_n > x_{n+1}},$$

последовательность называется ***убывающей***.

Общее название – ***монотонные последовательности***.

Пример 1

1, 2, 3, …, n, … – возрастающая последовательность.

Пример 2

$1,\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{3^2},\ \frac{1}{3^2},\ \ldots,\ \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2},\ \ldots$ – невозрастающая последовательность.

Теорема 1

Если неубывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то она сходится.

Доказательство

$\{x_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ имеет супремум $\bar{x}$.

Покажем, что существует $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}}$.

Так как $\bar{x} = \sup\{x_n\}$, то

1) $\forall n \ \ x_n \le \bar{x}$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ найдется элемент $x_N > \bar{x} - \varepsilon$, N – номер.

$\forall n > N \Rightarrow x_N \le x_n$ (по условию $\{x_n\}$ – неубывающая), то есть

$\bar{x} - \varepsilon < x_N \le x_n < \bar{x}$,

$\bar{x} - \varepsilon < x_n < \bar{x}$,

$0 < \bar{x} - x_n < \varepsilon$,

$|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$, то есть

$\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 2

Если невозрастающая последовательность ограничена снизу, то она имеет предел.

Доказательство

Аналогично доказательству Теоремы 1.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{x}.}$$

Замечание 1

Любая неубывающая последовательность ограничена снизу первым элементом. Любая невозрастающая последовательность ограничена сверху первым элементом.

Теорема 3

Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Доказательство

Теорема 3 эквивалентна Теореме 1 и Теореме 2, так как для того, чтобы невозрастающая последовательность стала ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу, так как сверху она всегда ограничена.

Аналогичное рассуждение проводится для неубывающей последовательности.

Замечание 2

Сходящаяся последовательность может и не быть монотонной.

Пример

$\{x_n\}:\ x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 1,}$$

$\{x_n\}$ – немонотонная последовательность.

Теорема 4

Неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой.

Доказательство

Пусть $\{x_n\}$ – невозрастающая, неограниченная (не ограничена снизу) последовательность $\Rightarrow$

$\forall A > 0$ (сколь угодно большого) найдется элемент x_N ($\exists N$):

$$\boxed{x_N < -A\,.}$$

$\forall n > N\ \ x_n < -A$ по определению.

$|x_n| > A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, что и требовалось доказать.

Аналогично для неубывающей последовательности.

19.2. Число e

Рассмотрим $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Докажем, что $\{x_n\}$ – возрастающая.

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n b^0 + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1))}{n!}a^0 b^n. \qquad (*)$$

Рассмотрим

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Почленно сравним x_n и x_{n+1}:

$2 = 2$,

$$1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

Аналогично для остальных $(n-1)$ слагаемых. Кроме того, в x_{n+1} есть еще $(n+2)$-е слагаемое. Поэтому $x_n < x_{n+1}$.

2. Докажем, что $\{x_n\}$ – ограничена сверху.

В (*) все множители $\left(1 - \frac{k}{n}\right) < 1$.

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \geq 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{k-1} = 2^{k-1}.$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

$$x_n \leq 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{n-1} = \updownarrow$$

По формуле суммы убывающей геометрической прогрессии ($b_1 = \frac{1}{2}$,

$b_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}$):

$$S_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\,;\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 1\,.$$

$\updownarrow = 3$.

$x_n < 3 \ \Rightarrow \ \{x_n\}$ – монотонная, ограниченная последовательность $\Rightarrow$

$$\boxed{\exists \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.}$$

Замечание

1) $2 < e < 3$.

2) Число e играет важную роль в математике.

19.3. Подпоследовательности и их свойства

Определение

Пусть $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – произвольная последовательность.

Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел

$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n,\ \ldots$

Выберем из $\{x_n\}$ элементы с номерами k_n:

$\{x_{k_n}\} = x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$

$\{x_{k_n}\}$ называется ***подпоследовательностью*** последовательности $\{x_n\}$.

Пример

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$:

а) для нечетных номеров 1, 3, 5, 7, …, $(2n+1)$, … – подпоследовательность $-1,\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{5}, \ldots$

б) для четных номеров 2, 4, 6, 8, …, $2n$, … – подпоследовательность $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, …

Теорема

Если $\{x_n\}$ сходится к a, то и любая ее подпоследовательность сходится к a.

Доказательство

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \forall\varepsilon\;\exists N(\varepsilon)\;\forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon$.

Пусть $\{x_{k_n}\}$ – некоторая подпоследовательность $\{x_n\}$.

Выберем $k_N \ge N \;\Rightarrow$ начиная с номера k_N элементы $\{x_{k_n}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n} - a| < \varepsilon \;\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = a},$$

что и требовалось доказать.

Теорема (Больцано-Вейерштрасса)

Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Пример 1

$$\{x_n\} = \left\{(-1)^n\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right\}.$$

$-3 \le x_n < 3$.

Последовательность ограниченная, немонотонная (из-за множителя $(-1)^n$).

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -2$.

Пример 2

$$\{y_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{3}\right\}.$$

$-1 < y_n < 1$.

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} y_{6n+1} = \lim_{n\to\infty} y_{6n+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Действительно,

$$y_{6n+1} = \sin\frac{\pi(6n+1)}{3} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\{y_{6n+1}\} = \left\{\sin\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}, \ldots\right\}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} y_{6n+1} = \lim_{n\to\infty} y_{6n+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогично

$$\lim_{n\to\infty} y_{6n+3} = \lim_{n\to\infty} y_{6n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{6n+4} = \lim_{n\to\infty} y_{6n+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Лекция 20. Функция и ее предел

Содержание

1. Определение функции.
2. Предел функции.
3. Односторонние пределы.
4. Ограниченные функции.
5. Бесконечно малые функции и их свойства.

20.1. Определение функции

Определение

Если каждому значению переменной x из множества $\{x\}$ ставится в соответствие по некоторому закону число y, то говорят, что на множестве $\{x\}$ задана ***функция*** $y = y(x)$ или $y = f(x)$.

Определение

Множество $\{x\}$ называется ***областью определения функции*** $y = y(x)$. Число y, соответствующее данному значению аргумента x, называется ***частным значением функции*** в точке x. Совокупность всех частных значений образует ***множество значений*** $\{y\}$ ***функции*** $y = y(x)$.

Пример 1

$y = \sqrt{1 - x^2}$.

$\{x\} = \{x \mid |x| \le 1\}$,

$\{y\} = \{y \mid 0 \le y \le 1\}$.

Пример 2

$y = |x|$.

$\{x\} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,

$\{y\} = \{y \mid 0 \le y < +\infty\}$.

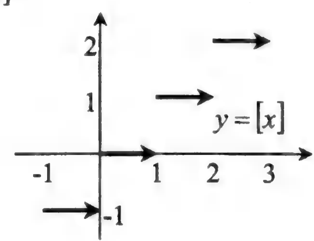
Пример 3

$y = [x]$.

$\{x\} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,

$\{y\}$ – множество целых чисел.

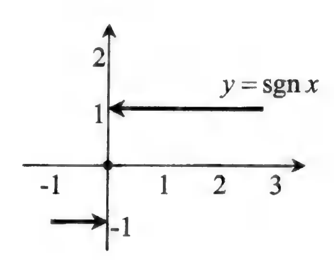
График функции $y = [x]$



Пример 4

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0 \end{cases} \quad - \textit{знак } x.$$

$\{x\} = \{x | -\infty < x < +\infty\}$,
$\{y\} = \{-1, 0, 1\}$.



Пример 5

$$y = \begin{cases} 0, x - \text{иррациональное}, \\ 1, x - \text{рациональное}, \end{cases}$$ – функция *Дирихле*.

$\{x\} = \{x | -\infty < x < +\infty\}$,
$\{y\} = \{0, 1\}$.

20.2. Предел функции

Определение

Пусть точка a такова, что в любой ее ε-окрестности содержатся точки области определения $\{x\}$ функции $y = y(x)$. В этом случае точка a называется ***неизолированной***.

Далее всюду точку a будем считать неизолированной.

Определение 1

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ при x, стремящемся к a ($x \to a$), если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента x из области определения $\{x\}$ ($x_n \neq a$) соответствующая последовательность значений функции $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, … сходится к b.
Обозначение:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Замечание

При рассмотрении предела функции при $x \to a$ сама точка a не рассматривается.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = x$.

$\{x_n\} \to a \;\Rightarrow\; \{y(x_n)\} = \{x_n\} \to a$.

Таким образом, в соответствии с определением предела функции

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Пример 2

Функция Дирихле не имеет предела, так как:

а) для рациональных точек: $\{x_n\} \to a$, $\{y(x_n)\} \to 1$;

б) для иррациональных точек: $\{x_n\} \to a$, $y(x_n) \to 0$.

Определение 2

Число b называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ $(x \neq a)$ следует $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Таким образом, для любой ε-окрестности точки b можно найти δ-окрестность точки a такую, что все значения функции для x из δ-окрестности точки a попадают в ε-окрестность точки b.

Из определения 2 следует, что чем ближе точка x расположена к точке a, тем ближе значение $f(x)$ расположено к b.

Теорема

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Доказательство

Покажем, что из определения 2 следует определение 1.

Пусть выполняется определение 2:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0: |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$.

Докажем, что из этого следует определение 1:
$\forall\{x_n\}\to a \;\Rightarrow\; \{f(x_n)\}\to b$.

Действительно, если $\{x_n\}\to a$, то $\forall\delta\;\exists N:\;\forall n>N \;\Rightarrow\; |x_n-a|<\delta$.

Но по определению 2, тогда $|f(x_n)-b|<\varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$, что и требовалось доказать.

Аналогично из определения 1 следует определение 2.

Определение 3

Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x\to\infty$, если $\forall\{x_n\}\to\infty \;\Rightarrow\; \{f(x_n)\}\to b$.

Определение 4

Число b называют ***пределом функции*** $f(x)$ при $x\to\infty$, если
$\forall\varepsilon>0\;\;\exists A(\varepsilon)>0:\; |x|>A \;\Rightarrow\; |f(x)-b|<\varepsilon$.

Теорема

Определения 3 и 4 эквивалентны.

Доказательство

Аналогично предыдущему.

Замечание

В определениях 1-4 одновременно две величины стремятся к двум значениям (два неравенства).

Покажем, как пользоваться определениями 2 и 4 для доказательства существования предела функции.

Пример 1

$y=x^2$, доказать, что

$$\boxed{\lim_{x\to 1} x^2=1.}$$

Доказательство

Чтобы доказать факт $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, следует для любого ε найти формулу для вычисления $\delta(\varepsilon)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство

$|1 - x^2| < \varepsilon \Rightarrow$

$|(1 - x)(1 + x)| < \varepsilon$,

$|1 - x| < \dfrac{\varepsilon}{|1 + x|}$.

Так как нам надо найти такую область ***вблизи*** точки $a = 1$, чтобы выполнялось это неравенство, будем считать, что $0 < x < 2$.

Тогда $|1 - x| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Взяв $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3}$, закончим доказательство.

Пример 2

$y = \dfrac{x+1}{x}$, доказать, что $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x} = 1}$.

Доказательство

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим неравенство $\left|\dfrac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

После упрощения подмодульного выражения получаем $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, то есть возможно установление формулы $A(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, что и завершает доказательство.

20.3. Односторонние пределы

Определение 5

Число b называется ***правым пределом*** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, элементы которой ***больше*** a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b, или, на другом языке,

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; 0 < x - a < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon .$

$$\boxed{\lim_{x \to a+0} f(x) = b.}$$

Определение 6

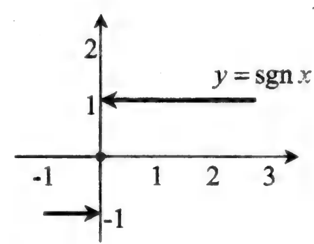
Число b называется ***левым пределом*** $f(x)$ в точке $x = a$, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, элементы которой ***меньше*** a, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к b, или на другом языке,

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; 0 < a - x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon .$

$$\boxed{\lim_{x \to a-0} f(x) = b.}$$

Пример

$y = \operatorname{sgn} x$



$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 1, \;\; \lim_{x \to 0-0} f(x) = -1 .$

Определение 7

Число b называется ***пределом*** $f(x)$ ***при*** $x \to +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A(\varepsilon) > 0 : \; \forall x > A(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon .$

Определение 8

Число b называется ***пределом*** $f(x)$ ***при*** $x \to -\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A(\varepsilon) > 0 : \; \forall x < -A(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon .$

Теорема (о равенстве односторонних пределов)

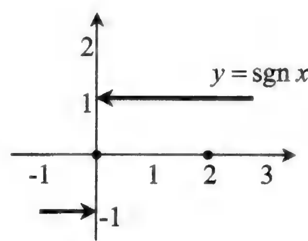
Если правый и левый пределы функции совпадают:

$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x),$

то
$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$.

Доказательство
Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения 5 следует, что
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_1(\varepsilon):\; 0 < x - a < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$.
Из определения 6 следует, что для того же ε $\exists \delta_2(\varepsilon):\; 0 < a - x < \delta_2 \;\Rightarrow$ $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Выберем $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Тогда для этих ε и $\delta(\varepsilon)$:
$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, что и требовалось доказать.

Пример
$y = \operatorname{sgn} x$



$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

20.4. Ограниченные функции

Определение
Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на множестве $\{x\}$, если $\exists M > 0:\; \forall x \in \{x\} \;\Rightarrow\; f(x) \le M$.

Определение
Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на множестве $\{x\}$, если $\exists m > 0:\; \forall x \in \{x\} \;\Rightarrow\; m \le f(x)$.

Определение

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу.

Пример

Функция $y=\operatorname{tg}x$:

а) на промежутке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ не ограничена сверху, следовательно, не ограничена на указанном промежутке;

б) на промежутке $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ является ограниченной;

в) на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ не ограничена снизу, следовательно, вообще не ограничена.

Теорема

Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то существует некоторая окрестность точки a такая, что при любом x из этой окрестности $f(x)$ ограничена.

Доказательство

Пусть $b=\lim\limits_{x\to a} f(x) \;\Rightarrow\; \forall\varepsilon>0 \;\; \exists\delta>0: \; |x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-b|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно системе неравенств

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

Обозначим $m_0=b-\varepsilon$, $M_0=b+\varepsilon$, то есть для любого x из δ-окрестности точки a ($x\neq a$):

$$m_0<f(x)<M_0.$$

Если $a\notin\{x\}$, теорема доказана.

Если $a\in\{x\}$, то есть $\exists f(a)$, тогда $m=\min\{m_0,f(a)\}$, $M=\max\{M_0,f(a)\}$.

Тогда $m\le f(x)\le M$ для всех точек δ-окрестности, включая точку a.

20.5. Бесконечно малые функции и их свойства

Определение

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Свойство 1

Если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

Доказательство

Из условия следует: $\{x_n\} \to a \;\Rightarrow\; \{\alpha(x_n)\} \to 0$, $\{\beta(x_n)\} \to 0$.

Покажем, что $\{\alpha(x_n) + \beta(x_n)\} \to 0$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

$\exists N_1(\varepsilon)$: $n > N_1 \;\Rightarrow\; |\alpha(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\exists N_2(\varepsilon)$: $n > N_2 \;\Rightarrow\; |\beta(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$, тогда

$n > N \;\Rightarrow\; |\alpha(x_n) + \beta(x_n)| \le |\alpha(x_n)| + |\beta(x_n)| < \varepsilon$. Что и означает $\{\alpha(x_n) + \beta(x_n)\} \to 0$ при $\{x_n\} \to a$.

Свойство 2

Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

Доказательство

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и $|f(x)| \le M$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) f(x) = 0$, то есть,

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |\alpha(x) f(x)| < \varepsilon$.

Действительно, так как $|f(x)| \le M$, остается лишь доказать, что $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Последнее выполняется, так как $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0: |x-a|<\delta \ \Rightarrow\ |\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{M}$,

что и требовалось доказать.

Свойство 3

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}=0$.

Лекция 21. Непрерывность функции в точке

Содержание

1. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.
2. Переход к пределу в неравенствах.
3. Непрерывность функции в точке.
4. Свойства непрерывной функции.
5. Классификация точек разрыва.

21.1. Арифметические операции над функциями, имеющими предел

Теорема

Если

1. $f(x)$, $g(x)$ определены на $\{x\}$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$,

то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=b\pm c$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=b\cdot c$,
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$, ($c\neq 0$!).

Доказательство

1. По условию $\forall\varepsilon>0$:

а) $\exists\delta_1>0: |x-a|<\delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x)-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$;

б) $\exists \delta_2 > 0: |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-c| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Из а) и б) следует:

$|(f(x) \pm g(x)) - (b \pm c)| \le |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}: |x-a| < \delta \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (b \pm c)| < \varepsilon$.

То есть $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$ (предел суммы равен сумме пределов), что и требовалось доказать.

Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично.

Так как предел функции связан с пределом последовательности, из теоремы автоматически следуют несколько утверждений.

Следствие 1

$\lim\limits_{n \to \infty}(y_n \pm z_n) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} z_n$.

Следствие 2

$\lim\limits_{n \to \infty}(y_n \cdot z_n) = \lim\limits_{n \to \infty} y_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} z_n$.

Следствие 3.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{z_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}{\lim\limits_{n \to \infty} z_n} \quad (\lim_{n \to \infty} z_n \ne 0).$$

21.2. Переход к пределу в неравенствах

Теорема

Если

1. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, $\exists \lim\limits_{n \to \infty} y_n$,
2. $x_n \le y_n \ \forall n$,

то

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} x_n \le \lim_{n \to \infty} y_n.}$$

Следствие 1

Если $\forall n \;\; x_n \le b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$.

Следствие 2

Если

1. $\forall n \;\; x_n \le y_n \le z_n$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

то

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = a.}$$

Доказательство

$x_n \le y_n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $a \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

$y_n \le z_n \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n \le \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \le a$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема

Если

1. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – заданы в некоторой окрестности точки a,
2. $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x$ из этой окрестности (кроме, быть может, самой точки a),
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$,

то

$$\boxed{\lim_{x\to a} g(x) = b.}$$

Доказательство

Возьмем некоторую последовательность $\{x_n\}$: $x_n \ne a$, $\{x_n\} \to a$.

$f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$.

При $\{x_n\} \to a$, $\{f(x_n)\} \to b \leftarrow \{h(x_n)\}$.

По следствию 2 из предыдущей теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, а так как последовательность $\{x_n\}$ – произвольная, то по первому определению предела функции $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

21.3. Непрерывность функции в точке

Пусть точка a не является изолированной точкой области определения $f(x)$.

Определение 1

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a, если

1. $\exists f(a)$;
2. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

При нарушении любого из этих трех условий $f(x)$ называют ***разрывной*** в точке a, а точку a ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

Определение 2

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a ***справа***, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Определение 3

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** a ***слева***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

Определение 1 означает, что

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon):\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Пример 1

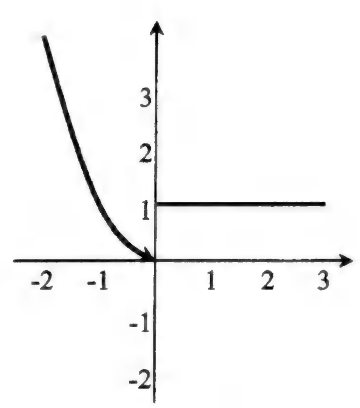
$f(x)=x$,

$\forall a:\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a=f(a)$.

$f(x)=x$ – непрерывна в любой точке a по определению непрерывности.

Пример 2

$$f(x)=\begin{cases} x^2, x<0,\\ 1, x\ge 0.\end{cases}$$



$f(x)$ – непрерывна в любой точке $a \neq 0$.

$f(x)$ – непрерывна справа в точке $a = 0$.

Замечание

Для непрерывной в точке a функции $f(x)$ справедливо

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \to a} x\right).$$

Теорема

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны в точке a.

Тогда

1. $(f(x) \pm g(x))$,
2. $f(x) \cdot g(x)$,
3. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $g(x) \neq 0$

непрерывны в точке a.

Доказательство

Для доказательства достаточно сослаться на теорему об арифметических операциях под знаком предела:

$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a)$,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a)$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)},\text{ если } g(a)\neq 0$$

и определение непрерывности функции в точке.

Следствие

Любая дробно-рациональная функция непрерывна в точке, где знаменатель не равен 0.

Доказательство

Функция $f(x)=x$ – непрерывна в любой точке x.

Функция $y=x^n$ – непрерывна, как произведение непрерывных функций.

Любой многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ – непрерывная функция, как сумма непрерывных функций.

Дробно-рациональная функция $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$ – непрерывна в любой точке x, где знаменатель не равен нулю.

21.4. Свойства непрерывной функции

Определение

Величина $\Delta y=f(x)-f(a)$ называется ***приращением функции*** в точке a.

Теорема

Функция непрерывна в точке a
тогда и только тогда, когда
бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Доказательство

Необходимость

Условие $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Утверждение $\Delta x\to 0\ \Rightarrow\ \Delta y\to 0$.

По условию: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |\Delta x| < \delta \ \Rightarrow \ |\Delta y| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 .$$

Определение

Функция, непрерывная в любой точке $\{x\}$, называется ***непрерывной на множестве*** $\{x\}$.

Теорема (об устойчивости знака непрерывной функции)

Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$,

то существует такая ε-окрестность точки a, что для всех значений x из этой окрестности $f(x) \neq 0$ и имеет знак, совпадающий со знаком $f(a)$.

Доказательство

По условию $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, когда $a - \delta < x < a + \delta$, но если взять $\varepsilon < |f(a)|$, числа $f(a) + \varepsilon$ и $f(a) - \varepsilon$ будут одного знака, поэтому в δ-окрестности точки a, соответствующей этому ε, функция $f(x)$ будет иметь знак числа $f(a)$.

21.5. Классификация точек разрыва

Рассмотрим точку разрыва a функции $f(x)$.

Определение

Точка a называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $f(x)$, если существуют конечные пределы $\lim_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim_{x \to a-0} f(x)$. При этом

если $\lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$ – ***разрыв неустранимый*** (конечный скачок);

если $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ – ***разрыв устранимый***.

В противном случае точка a называется ***точкой разрыва второго рода***.

Пример 1

$$y = f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

Точка $x = 0$ – точка разрыва (функция в этой точке не определена).

Так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$,

$0 \neq 1 \Rightarrow$ разрыв первого рода, неустранимый.

Пример 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2, \\ 5, x = 2. \end{cases}$$

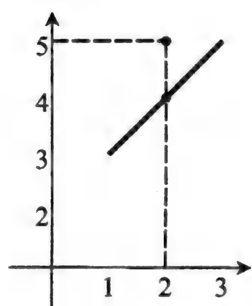
Точка $x = 2$ – точка разрыва, так как $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$:

$\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x) = 4$, $f(2) = 5$.

По определению это разрыв первого рода, устранимый.

Его можно устранить, то есть рассмотреть другую функцию $f_1(x) = \begin{cases} f(x), x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), x = a, \end{cases}$ построенную из данной функции и непрерывную в точке a.

В примере $f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2, \\ 4, \ x = 2. \end{cases}$



$f_1(x)$ – непрерывна всюду.

Пример 3

$f(x) = \frac{1}{x}$.

Точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

Лекция 22. Замечательные пределы

Содержание

1. Монотонные функции. Обратные функции.
2. Непрерывность основных элементарных функций.
3. Сложная функция и ее непрерывность.
4. Гиперболические функции.
5. Замечательные пределы.

22.1. Монотонные функции. Обратные функции

Определение

Пусть $f(x)$ задана на $\{x\}$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$: $x_1 < x_2$

1. $f(x_1) \le f(x_2)$, функция $f(x)$ ***неубывающая***,
2. $f(x_1) < f(x_2)$, функция $f(x)$ ***возрастающая***,
3. $f(x_1) \ge f(x_2)$, функция $f(x)$ ***невозрастающая***,
4. $f(x_1) > f(x_2)$, функция $f(x)$ ***убывающая***

на множестве $\{x\}$.

В случаях 1-4 функции называются ***монотонными***. В случаях 2, 4 функции – ***строго монотонные***.

Пример 1

$f(x) = x$ – возрастающая на множестве $(-\infty, +\infty)$.

Пример 2

$f(x) = \frac{1}{x}$ – убывающая для $x > 0$.

Определение

Пусть

1. $[a,b]$ – область определения функции $y=f(x)$;
2. $[\alpha,\beta]$ – область значений $y=f(x)$;
3. любому значению функции $y\in[\alpha,\beta]$ соответствует одно значение аргумента $x\in[a,b]$.

Тогда

1. $[\alpha,\beta]$ – область определения новой функции x аргумента y;
2. $[a,b]$ – область значений функции x аргумента y;

Обозначение для новой функции $x=f^{-1}(y)$.

Функция $x=f^{-1}(y)$ называется ***обратной*** для функции $y=f(x)$.

Замечание 1

Аналогичные определения можно сделать для интервалов (a,b), (α,β).

В частности, для $(a,b)=(-\infty,+\infty)$, $(\alpha,\beta)=(-\infty,+\infty)$.

Замечание 2

Если $x=f^{-1}(y)$ обратная к $y=f(x)$, то $y=f(x)$ – обратная к $x=f^{-1}(y)$.

То есть обе функции ***взаимообратные***.

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y\,,\ f^{-1}\left(f(x)\right)=x\,.$$

Пример

$y=f(x)=3x$, где $\{x\}=[0,1]$. Соответствующая обратная функция $f^{-1}(y)=x=\frac{1}{3}y$, где $\{y\}=[0,3]$.

Замечание 3

Для строго монотонных функций всегда существует обратная, так как любому y соответствует ***одно*** значение x.

Теорема

Пусть

1. $y=f(x)$ – строго монотонная, непрерывная на $[a,b]$ функция;

2. $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.
Тогда $\exists x = f^{-1}(y)$ – строго монотонная, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

22.2. Непрерывность основных элементарных функций

К основным элементарным функциям относятся следующие функции: $y = x^\alpha$, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Теорема

Основные элементарные функции непрерывны в каждой точке их области определения.

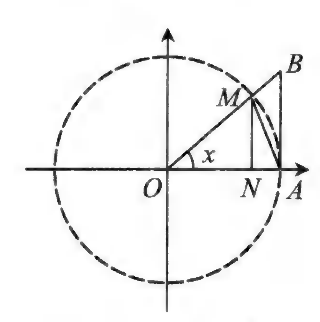
Доказательство (для $f(x) = \sin x$)

1. Лемма

При $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ справедлива система неравенств

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Рассмотрим рисунок



Здесь $OA = R = 1$, x – длина дуги $\breve{AM}$, $MN = \sin x$, $ON = \cos x$, $AB = \operatorname{tg} x$.

ΔOMA – часть сектора OMA.

Сектор OMA – часть ΔOBA. Следовательно, площади указанных плоских фигур удовлетворяют системе неравенств

$$S_{\Delta OMA} < S_{секOMA} < S_{\Delta OBA},$$

отсюда

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

$$\boxed{0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.}$$

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x = 0$.

Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\} \to +0$ ($x_n > 0$).

По лемме $0 < \sin x_n < x_n$. Устремим $n \to \infty$, тогда по теореме о переходе к пределу в неравенствах

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = 0.$$

Отсюда следует (см. определение предела и определение непрерывности функции)

$$\boxed{\lim_{x\to 0+0} \sin x = 0 = \sin 0} -$$

– непрерывность функции $\sin x$ в точке $x = 0$ ***справа***.

Пусть $\{x_n\} \to 0-0$ ($x_n < 0$).

$$x_n < \sin x_n < 0 \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0-0} \sin x = 0 = \sin 0} -$$

– непрерывность функции $\sin x$ в точке $x = 0$ ***слева***.

По теореме о равенстве односторонних пределов $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0}$.

Вывод

Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в точке $x = 0$.

3. Рассмотрим любую точку $x = a \neq 0$.

Покажем, что $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, то есть

$$\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = 0.$$

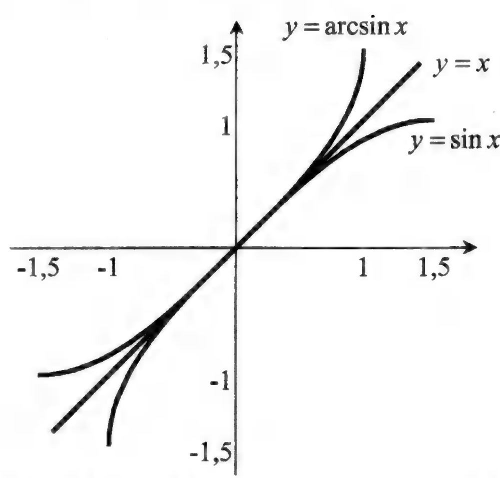
Рассмотрим равенство $\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}$. Для завершения доказательства выполним переход к пределу

$$\lim_{x\to a}(\sin x - \sin a) = 2\lim_{x\to a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right) = 0.$$

Этот переход возможен, так как $\cos\frac{x+a}{2}$ – величина ограниченная, а $\sin\frac{x-a}{2}$ – бесконечно малая и стремящаяся к 0, значит, и все произведение, по соответствующей теореме, стремится к 0.

Используем полученный результат для обоснования непрерывности элементарной функции $y = \arcsin x$.

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Так как эта функция строго монотонна и непрерывна, то по соответствующей теореме она имеет непрерывную обратную функцию $x = \arcsin y$ на $[-1,1]$. После переобозначения переменных, при котором переменные меняются ролями, получим $y = \arcsin x$.



Смена ролей переменных приводит к тому, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

22.3. Сложная функция и ее непрерывность

Определение

Пусть

1. $x = \varphi(t)$ задана на $\{t\}$ и имеет множество значений $\{x\}$;

2. $y = f(x)$ задана на $\{x\}$.
Тогда на множестве $\{t\}$ задана ***сложная функция*** $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$, или

$$\boxed{y = F(t) = f(\varphi(t)).}$$

Пример 1

$y = \sin x$, $x = t^2$.

$0 \le x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$.

$y(t) = \sin t^2$ – сложная функция.

Пример 2

$y = \sqrt{x-1}$, $x = -t^2$.

$-\infty < t < +\infty$, $\{x\} = (-\infty, 0]$.

Сложная функция $y(t)$ не может быть определена.

Теорема

Если

1. $x = \varphi(t)$ – непрерывна в точке $t = a$,
2. $y = f(x)$ – непрерывна в точке $x = b = \varphi(a)$,

то $y = f(\varphi(t))$ – непрерывна в точке $t = a$.

Доказательство

Докажем, что $\lim\limits_{t \to a} f(\varphi(t)) = f(\varphi(a)) = f(b)$.

$\forall\{t_n\} \to a$ $\{\varphi(t_n)\} \to \varphi(a) = b$ (из условия 1).

$x_n = \varphi(t_n) \Rightarrow \{x_n\} \to b$.

$\{f(x_n)\} \to f(b)$ (из условия 2).

Но $f(x_n) = f(\varphi(t_n))$, то есть $\forall\{t_n\} \to a$ $\{f(\varphi(t_n))\} \to f(\varphi(a))$.

Следовательно, $f(\varphi(t))$ – непрерывна в точке $t = a$, что и требовалось доказать.

Замечание-вывод

Если исходные функции непрерывны, то в результате их сложения, вычитания, умножения, деления (если знаменатель не равен нулю), перехода к обратной и сложной функции получаются непрерывные функции.

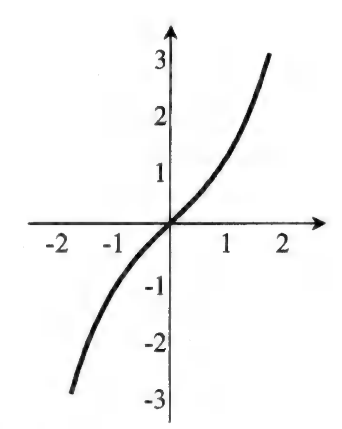
Пример

Функция $\operatorname{arctg}(\sin(x^2 + x + 1))$ – непрерывна всюду.

22.4. Гиперболические функции

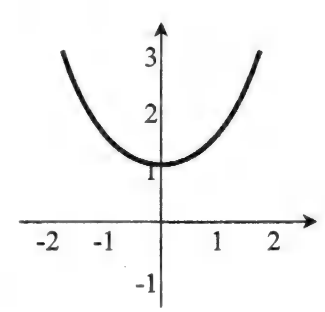
Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



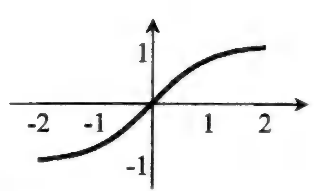
Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



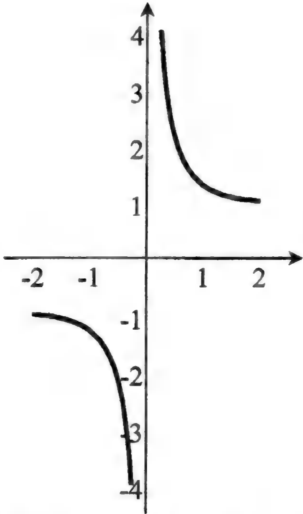
Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$



Гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$



Все рассмотренные в этом разделе функции непрерывны всюду, кроме точки $x = 0$ для $\operatorname{cth} x$.

22.5. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Доказательство

При $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ (по лемме) справедлива система неравенств

$$0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

После почленного деления на $\sin x$ получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Система неравенств справедлива и для $x < 0$, так как $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Далее, элементарная функция $\cos x$ является непрерывной, следовательно

$$x \to 0 \;\Rightarrow\; \cos x \to \cos 0 = 1.$$

Переходя к пределу в неравенствах, получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.} \qquad (*)$$

Это утверждение является следствием доказанной ранее теоремы о числе e.

Замечание

В равенстве (*) x может стремиться как к $+\infty$, так и к $-\infty$.

Следствие

$$\boxed{\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.}$$

Доказательство

Сделаем в (*) замену $x' = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{x'}$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'} = e$$, что и требовалось доказать.

В первом замечательном пределе имеет место неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Во втором – $\left[1^{\infty}\right]$.

Пример 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\lim_{x'\to 0}\frac{\sin x'}{x'} = 2\,.$$

Пример 2

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{x} = \left\{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right\}^{\infty} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-2)+1+2}{2x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{x} =$$

$$= \updownarrow x' = \frac{2x-2}{3},\, x = \frac{3x'+2}{2} \updownarrow = \lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{\frac{3x'+2}{2}} = \lim_{x'\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x'}\right) =$$

$$= \lim_{x'\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right) = \left[\lim_{x'\to\infty}\left(1+\frac{1}{x'}\right)^{x'}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}\,.$$

Пример 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1\,.$$

Лекция 23. Эквивалентные бесконечно малые функции

Содержание

1. Сравнение бесконечно малых функций.
2. Некоторые эквивалентные бесконечно малые функции при $x = 0$.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

23.1. Сравнение бесконечно малых функций

Определение

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$.

Тогда

1. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости***, чем $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

Обозначение

$$\boxed{\alpha=o(\beta).}$$

2. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка***, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, $c\neq 0$.

3. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

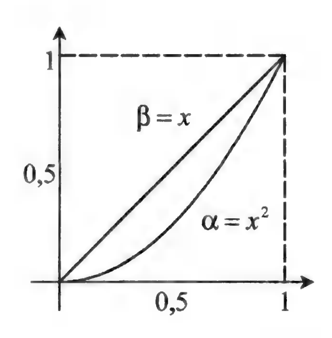
Обозначение

$$\boxed{\alpha(x)\sim\beta(x).}$$

Пример 1

$\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=x$ – бесконечно малые при $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0 \Rightarrow \alpha=o(\beta)$.



Пример 2

$\alpha(x)=2x^2$, $\beta(x)=x^2$ – бесконечно малые при $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=2 \Rightarrow \alpha$, β – бесконечно малые при $x\to 0$ одного порядка.

Пример 3

$\alpha(x)=\sin x$, $\beta(x)=x$ – бесконечно малые при $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \alpha$, β – эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$.

Теорема

Для того чтобы бесконечно малые при $x\to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\alpha(x)).$$

Доказательство

Необходимость

Условие: α, β – эквивалентные бесконечно малые при $x\to a$.

Утверждение: $\alpha=\beta+o(\alpha)$.

По условию

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \Rightarrow \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1+\gamma(x)$, $\alpha(x)=\beta(x)+\beta(x)\gamma(x)$.

Разделим последнее равенство на $\alpha(x)$ и устремим $x\to a \Rightarrow \alpha(x)\to 0$, тогда

$\dfrac{\beta(x)\gamma(x)}{\alpha(x)}\to 0 \Rightarrow \beta(x)\gamma(x)=o(\alpha(x))$, что и требовалось доказать.

Достаточность

Условие: бесконечно малые при $x\to a$ α и β удовлетворяют равенству $\alpha=\beta+o(\alpha)$.

Утверждение: α, β – эквивалентные бесконечно малые при $x\to a$.

Разделим равенство, фигурирующее в условии, на $\alpha(x)$:

$$1=\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}+\frac{o(\alpha)}{\alpha(x)}.$$

При $x\to a$ $\frac{o(\alpha)}{\alpha}\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, что и требовалось доказать.

Теорема

При вычислении предела при $x\to a$ ***бесконечно малые множители*** можно заменять на эквивалентные.

Доказательство

Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Рассмотрим

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)\cdot f(x))=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\beta(x)\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to a}\beta(x)f(x)=$$

$=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)\cdot f(x)$, что и требовалось доказать.

23.2. Некоторые эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to 0$

1. $\sin x\sim x$.
2. $\operatorname{tg}x\sim x$.
3. $\operatorname{arctg}x\sim x$.
4. $\arcsin x\sim x$.
5. $\sqrt{1+x^n}-1\sim\frac{1}{2}x^n$.
6. $(1+x^n)^\alpha-1\sim\alpha x^n$ (n,α – числа).
7. $\ln(1+x)\sim x$.
8. $e^x-1\sim x$.
9. $a^x-1\sim x\ln a$.
10. $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \updownarrow x=\sin y, x\to 0, y\to 0 \updownarrow = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y} = 1$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^n}-1}{\frac{1}{2}x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^n}-1\right)\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)}{\frac{1}{2}x^n\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)\cdot\frac{1}{2}x^n} = 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$.

23.3. Раскрытие неопределенностей

В ряде случаев вычисление пределов затрудняется тем, что появляются неопределенные выражения $[\infty-\infty]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $[0\cdot\infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$.

Для устранения неопределенностей используются специальные приемы. Некоторые из них будут продемонстрированы на примерах, разобранных далее.

Пример 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_m}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_n}{x^n}} = \frac{a_0}{b_0}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases}\infty, m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, m=n,\\ 0, m<n.\end{cases}$$

Пример 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right) = \updownarrow \text{обозначим } y=-x \updownarrow = \lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y^2+2}+y\right) = +\infty.$$

Пример 3

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-x)=\lim_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\updownarrow \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\sim\frac{\pi x}{2}\updownarrow=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Пример 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)}{x}=\updownarrow \ln\left(1+\frac{x}{a}\right)\sim\frac{x}{a}\updownarrow=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{a}}{x}=\frac{1}{a}.$$

23.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Свойство 1

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство

Докажем методом от противного, что $f(x)$ – ограничена сверху (снизу – аналогично).

Пусть $f(x)$ не является ограниченной сверху.

Тогда $\forall n\ \ \exists x_n\in[a,b]:\ f(x_n)\ge n$, то есть $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

Так как справедливо $\boxed{a\le x_n\le b}$, последовательность $\{x_n\}$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\{x_{k_n}\}\to\xi,\ \xi\in[a,b].$$

Но, так как $\{f(x_n)\}\to\infty\ \Rightarrow$

$$\{f(x_{k_n})\}\to\infty. \qquad (*)$$

С другой стороны, так как $f(x)$ непрерывна, из условия $\{x_{k_n}\}\to\xi$ следует

$$\{f(x_{k_n})\}\to f(\xi). \qquad (**)$$

Высказывания (*) и (**)противоречивы. Следовательно, предположение неверно и $f(x)$ является ограниченной сверху.

Замечание

Требование непрерывности на ***отрезке*** обязательно, так как функция, непрерывная на ***интервале***, может и не быть ограниченной.

Пример

$f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывная на $(0,1)$, не является ограниченной.

Свойство 2

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на нем своих точной верхней и точной нижней граней.

Дополнительное определение (см. Л. 20 п. 4)

$f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на $\{x\}$, если $\forall x \in \{x\}$ $f(x) \leq M$, где M – ***верхняя грань***.

Верхних граней M сколь угодно много.

Определение

Наименьшее из $\{M\}$ называется ***точной верхней гранью***.
$\overline{M} = \sup\{f(x)\}$, $x \in \{x\}$.

Пример

$y(x) = \sin x$, $\{x | -\infty < x < +\infty\}$.
$\overline{M} = 1$.

Определение

$f(x)$ – называется ***ограниченной снизу*** на $\{x\}$, если $\forall x \in \{x\}$, $m \leq f(x)$, где m – ***нижняя грань***.

Определение

Наибольшее из $\{m\}$ называется ***точной нижней гранью***.
$\underline{m} = \inf\{f(x)\}$, $x \in \{x\}$.

Пример 1

$y(x) = \sin x$, $\{x | -\infty < x < +\infty\}$. $\underline{m} = -1$.

Пример 2

$y(x) = |x|$, $[-1,1]$. $\underline{m} = 0$.

Доказательство

Докажем, что $\exists x_1 \in [a,b]$: $f(x_1) = \overline{M}$; $\exists x_2 \in [a,b]$: $f(x_2) = \underline{m}$.

Воспользуемся методом от противного. Предположим, что точек x_1 – нет. Тогда

$\forall x \ \ f(x) < \overline{M}$, $\overline{M} - f(x) > 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = \dfrac{1}{\overline{M} - f(x)}$.

Функция $F(x)$ – непрерывна на $[a,b]$ ($(\overline{M} - f(x)) \neq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$).

Из непрерывности $F(x)$ следует ее ограниченность на $[a,b]$.

Следовательно,

$F(x) = \dfrac{1}{\overline{M} - f(x)} \leq B \ \Rightarrow \ f(x) \leq \overline{M} - \dfrac{1}{B}$, то есть $\overline{M} - \dfrac{1}{B}$ – также верхняя грань, причем $\overline{M} - \dfrac{1}{B} < \overline{M}$ ($B > 0$) $\Rightarrow$ $\overline{M}$ – не является точной верхней гранью.

Это противоречие доказывает теорему.

Замечание 1

Для интервалов (a,b) и полуинтервалов $(a,b]$, $[a,b)$ теорема не справедлива.

Пример

$y = x$, $x \in (0,1)$. Значения

$\sup\{x\} = 1$, $\inf\{x\} = 0$ не достигаются.

Замечание 2

Так как для непрерывных на $[a,b]$ функций точные верхние и нижние грани достигаются, их можно назвать ***наибольшим*** и ***наименьшим*** значениями функции.

Свойство 3 (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение)

Пусть
1. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2. $f(a)=A$, $f(b)=B$;
3. $A<C<B$ (C – промежуточное значение функции).

Тогда
$\exists\xi\in[a,b]:\ f(\xi)=C$.

Лемма

Пусть
1. $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2. $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков.

Тогда
$\exists\xi\in[a,b]:\ f(\xi)=0$.

Доказательство

Пусть $f(a)<0$, $f(b)>0$.

Рассмотрим множество $\{x\}:\ f(x)<0$.

$\{x\}$ – ограничено сверху, например, числом $b \Rightarrow \exists\sup\{x\}=\xi$ – точная верхняя грань (число).

Покажем, что $f(\xi)=0$.

Если бы выполнялось $f(\xi)=c>0$, то по теореме о сохранении знака непрерывной функции $\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta) \Rightarrow f(x)>0$.

Но тогда ξ не является $\sup\{x\}$, где $f(x)<0$.

Аналогично для $f(\xi)=c<0$.

Окончательно $f(\xi)=0$, что и требовалось доказать.

Доказательство свойства 3

Если $A = B$, то не существует промежуточного числа C: $A < C < B$.

Пусть для определенности $A < B$. Рассмотрим любое значение C: $A < C < B$.

Составим разность

$F(x) = f(x) - C \Rightarrow F(a) < 0,\ F(b) > 0$.

Тогда, по Лемме

$\exists \xi \in (a,b)$: $F(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) - C = 0 \Rightarrow f(\xi) = C$, что и требовалось доказать.

Замечание

Свойство 3 применяется на практике для отыскания корней уравнений вида

$$\boxed{F(x) = 0}$$

методом половинного деления отрезка.

Программа курса

I. Определители и матрицы

Понятие матрицы. Виды квадратных матриц. Транспонирование матрицы. Определители второго, третьего, n-го порядка. Свойства определителей. Основные операции над матрицами и их свойства. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Матричные уравнения. Невырожденные системы n линейных уравнений с n неизвестными. Три способа их решения: матричный, по формулам Крамера, метод Гаусса.

II. Алгебра векторов

Вектор, линейные операции над векторами. Свойства линейных операций над векторами. Линейная зависимость векторов. Свойства линейной зависимости векторов. Геометрические критерии линейной зависимости векторов.

Базис, координаты вектора. Теорема о единственности разложения вектора по базису. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме. Критерий коллинеарности двух векторов. Декартов прямоугольный базис на плоскости и в пространстве. Проекция вектора на ось. Геометрический смысл декартовых координат. Направляющие косинусы вектора. Ортогональные вектора.

Скалярное произведение двух векторов. Алгебраические, геометрические и механические свойства скалярного произведения. Формула вычисления скалярного произведения векторов, заданных декартовыми координатами. Важные следствия (длина вектора, критерий ортогональности двух векторов). Правая и левая тройки векторов. Векторное произведение двух векторов. Алгебраические, геометрические и механические свойства векторного произведения. Формула вычисления векторного произведения векторов, заданных декартовыми координатами. Смешанное произведение трех векторов. Теорема о геометрическом смысле смешанного произведения. Формула вычисления смешанного произведения векторов, заданных декартовыми координатами.

III. Аналитическая геометрия

Предмет аналитической геометрии. Аналитическое задание точки, линии, поверхности. Параметрические уравнения линии и поверхности. Плоскость в пространстве. Различные формы уравнения плоскости. Угол

между двумя плоскостями. Условие ортогональности двух плоскостей. Прямая в пространстве. Различные формы уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Взаимная ориентация двух прямых: параллельность, пересечение, скрещивание. Угол между прямой и плоскостью.

Кривые второго порядка на плоскости. Их канонические уравнения. Исследования формы кривых второго порядка по их каноническим уравнениям. Канонические уравнения кривых второго порядка со смещенным центром (вершиной). Канонизация уравнений кривых второго порядка путем поворота системы координат и ее параллельного переноса.

Поверхности второго порядка. Их канонические уравнения. Исследования формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям методом параллельных сечений.

IV. Элементы линейной алгебры

Линейное пространство. Линейная зависимость элементов линейного пространства.

Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о базисном миноре. Нахождение ранга матрицы методом элементарных преобразований. Размерность и базис линейного пространства. Теорема о единственности разложения элемента по базису. Координаты элемента. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат элемента при переходе к другому базису.

Евклидовы пространства. Простейшие свойства евклидова пространства (неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника). Ортонормированный базис (ОНБ).

Линейные операторы. Матричная запись линейных операторов. Теорема о взаимнооднозначном соответствии линейного оператора и матрицы. Действия с линейными операторами. Тождественный и обратный оператор. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Определение и три теоремы. Самосопряженный оператор. Определение и теорема о матрице самосопряженного оператора в ОНБ. Ортогональный оператор. Определение и критерии ортогональности линейного оператора. Системы линейных уравнений (общий случай). Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений). Однородные системы линейных уравнений (ОСЛУ). Тривиальное решение ОСЛУ. Условие единственности тривиального решения ОСЛУ. Кри-

терий существования нетривиальных решений ОСЛУ. Свойства решений ОСЛУ. Фундаментальная система решений ОСЛУ. Теорема о структуре общего решения ОСЛУ. Неоднородные системы линейных уравнений (НСЛУ). Теорема о структуре общего решения НСЛУ. Алгоритм поиска общего решения ОСЛУ и НСЛУ.

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение и спектр линейного оператора. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора.

Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Приложения теории квадратичных форм к задачам аналитической геометрии.

V. Введение в математический анализ

Множества вещественных чисел. Верхняя и нижняя грани множества. Ограниченное множество. Точная верхняя и точная нижняя грань. Числовая последовательность и ее предел. Определения сходящейся, бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Теоремы о сходимости монотонных последовательностей. Число e.

Подпоследовательности и их свойства. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Определение функции. Предел функции. Четыре определения предела и теоремы об их эквивалентности. Односторонние пределы. Теорема о равенстве односторонних пределов. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Арифметические операции под знаком предела. Переход к пределам в неравенствах. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке (три теоремы, критерий непрерывности, ограниченность и сохранение знака в окрестности точки непрерывности). Классификация точек разрыва. Непрерывность на множестве. Обратная функция и ее непрерывность. Непрерывность элементарных функций (доказательство непрерывности функции $\sin x$). Сложная функция и ее непрерывность. Гиперболические функции. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций. Соотношения эквивалентности. Раскрытие неопределенностей. Свойства функций, непрерывных на отрезке (ограниченность, достижение точных граней, прохождение через промежуточные значения).

Учебное издание

Т.А. Матвеева, Н.Г. Рыжкова

Высшая математика

Конспект лекций

Часть I

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *А.С. Щербинина*

ИД №06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать 27.07.2004			Формат 60x84 1/16
Бумага типографская		Офсетная печать	Усл. печ. л. 11,33
Уч.-изд. л. 6,7	Тираж 150	Заказ 287	Цена «С»

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Типография научно-исследовательской части ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19

Т. А. МАТВЕЕВА
Н. Г. РЫЖКОВА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА